

数学演習第二 (演習第 13 回) 【解答例】

線形：行列の固有値, 固有ベクトル, 対角化

2019 年 1 月 23 日

- 1** (1) $F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda - 4 & -1 \\ -2 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. A の固有値は $\lambda = 1, 2$.
- (2) $\lambda = 1$ に対して: $E - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.
- $\lambda = 2$ に対して: $2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.
- (3) $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおいて, $AP = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 従って, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- 2** (a) について
- (1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 9 \\ -6 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$. A の固有値は $\lambda = -1, 2$.
- (2) $\lambda = -1$ に対して: $-E - A = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(-E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_{-1} の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 2$ に対して: $2E - A = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.
- (3) $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- (b) について
- (1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 & -5 \\ -1 & \lambda - 2 & -3 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$.
- (2) $\lambda = 1$ に対して: $E - A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 2$ に対して: $2E - A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\lambda = 3$ に対して: $3E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(3E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.
- (3) $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) について

$$(1) F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -1 \\ 4 & \lambda-5 & -2 \\ -4 & 4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3. \quad A \text{ の固有値は } \lambda = 1.$$

$$(2) \lambda = 1 \text{ に対して: } E - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ より, } (E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解は } \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (} s, t \text{ は任意定数). よって, } V_1 \text{ の基底は } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

(3) $\dim V_1 = 2 < 3$ であるから対角化できない.

3

$$(1) [P \ E] \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \text{ より,}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}. \text{ また, } P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}. \text{ よって, } A^n = P(P^{-1}AP)^nP^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2(2^n-1) & 2^n-1 \\ -(2^n-1) & 3 \cdot 2^n-2 & 2^n-1 \\ 2(2^n-1) & -4(2^n-1) & -2^n+2 \end{bmatrix}.$$

$$(2) P^{-1}AP = {}^t(P^{-1}AP) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ より, } Q = {}^t(P^{-1}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ とおけば, } Q^{-1}{}^tAQ =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ これより, } {}^tA \text{ の固有値も } 1, 2 \text{ で, } V_1 \text{ の基底が } \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ で, } V_2 \text{ の基底が } \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

$$(3) \mathbf{c}_n = A\mathbf{c}_{n-1} = A^2\mathbf{c}_{n-2} = \cdots = A^n\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2(2^n-1) & 2^n-1 \\ -(2^n-1) & 3 \cdot 2^n-2 & 2^n-1 \\ 2(2^n-1) & -4(2^n-1) & -2^n+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2^{n+1}+1 \\ 2^{n+2}-2 \end{bmatrix}.$$

(4) $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ を $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ に代入して, $P\mathbf{y}'(t) = AP\mathbf{y}(t)$, すなわち $\mathbf{y}'(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t)$. これを成分

$$\text{で表せば, } \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}, \text{ すなわち } \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}. \text{ これを解いて, } \begin{cases} y_1(t) = C_1e^t \\ y_2(t) = C_2e^{2t} \\ y_3(t) = C_3e^{2t} \end{cases}$$

となり, 求める一般解は

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{2t} \\ C_3e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1e^t + (2C_2 + C_3)e^{2t} \\ -C_1e^t + C_2e^{2t} \\ 2C_1e^t + C_3e^{2t} \end{bmatrix} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は任意定数}).$$

4

(1) $(A\mathbf{p}_1, \dots, A\mathbf{p}_n) = (f(\mathbf{p}_1), \dots, f(\mathbf{p}_n)) = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)D = (\mu_1\mathbf{p}_1, \dots, \mu_n\mathbf{p}_n)$ (2 番目の等号で表現行列の定義を用いた) より, $A\mathbf{p}_i = \mu_i\mathbf{p}_i$ ($1 \leq i \leq n$). $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{0}$ であるから, μ_i は A の固有値であり, \mathbf{p}_i は μ_i に対する固有ベクトルである.

(2) (1) の結果から, $AP = A[\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n] = [A\mathbf{p}_1 \ \cdots \ A\mathbf{p}_n] = [\mu_1\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mu_n\mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]D = PD$. $\mathcal{B} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ が \mathbb{R}^n の基底であるから $P = [\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]$ は正則行列となる. よって, $AP = PD$ から $P^{-1}AP = D$ が従う.

(3) $A = PDP^{-1}$ と書けるから, $F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = |P(\lambda E - D)P^{-1}| = |P| \begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda - \mu_n \end{vmatrix} |P^{-1}| = (\lambda - \mu_1) \cdots (\lambda - \mu_n)$. ここで, $|P||P^{-1}| = |PP^{-1}| = |E| = 1$ を用いた.

(4) $A = PDP^{-1}$ より $A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} \Leftrightarrow (\mu E - D)P^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mu - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu - \mu_n \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であるから, μ は μ_1, \dots, μ_n のいずれかと一致する. $\mu_i = \mu$ となる i を i_1, \dots, i_s (s が固有値 μ の重複度) とすれば, $\mathbf{x} \in V_\mu \Leftrightarrow P^{-1}\mathbf{x} \in \langle \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_s} \rangle \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \langle \mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_s} \rangle$. よって, $V_\mu = \langle \mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_s} \rangle$ となり, $s = \dim V_\mu$ が示された.