

数学演習第二 (演習第 13 回)

線形：行列の固有値，固有ベクトル，対角化

2019 年 1 月 23 日

1 正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

- (1) A の固有多項式 $F_A(\lambda) = |\lambda E - A|$ を計算し, A の固有値を求めよ.
- (2) A の各固有値 λ に対して, A の固有空間 $V_\lambda := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ の基底 (すなわち同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解) を求めよ.
- (3) A を対角化せよ (すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ). ここでは, P^{-1} の計算は必要ないことに注意 (対角化の手順については線形教科書 p.93 参照).

2 次の正方行列 A について下の問いに答えよ.

(a) $A = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

- (1) A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ および固有値を求めよ.
- (2) A の各固有値 λ に対して, 固有空間 V_λ の基底を求めよ.
- (3) A が対角化可能かどうかを調べ, 対角化可能ならば A を対角化せよ ($P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ).

3 1 の A, P に対して次の問いの答えよ.

- (1) P^{-1}, A^n を計算せよ.
- (2) A の転置行列 tA を対角化せよ.
- (3) $\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_n = A\mathbf{c}_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) で定まるベクトル列 $\{\mathbf{c}_n\}_{n=0}^\infty$ の一般項を求めよ.
- (4) ベクトル値関数 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ に対する微分方程式 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ の一般解を求めよ. (ヒント: $\mathbf{x}(t) := P\mathbf{y}(t)$ とおいて, $\mathbf{y}(t)$ に関する微分方程式に書き換える.)

4

A が実数成分の n 次正方行列のとき, \mathbb{R}^n の線形変換 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) が対角化可能 (すなわち, \mathbb{R}^n の基底を適当に選べば表現行列が対角行列になる) であるための条件を調べる. \mathbb{R}^n の基底 $\mathcal{B} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ に関する f の表現行列が対角行列

$$D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_n \end{bmatrix} \quad (\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R})$$

となると仮定して, 以下の問いに答えよ.

- (1) 表現行列の定義に即して, 各 i ($1 \leq i \leq n$) について, μ_i は A の固有値 (= f の固有値), \mathbf{p}_i は μ_i に対する固有ベクトルとなることを示せ.
- (2) $P = [\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]$ ($\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ を並べてできる n 次正方行列) とおくと, $P^{-1}AP = D$ が成り立つことを示せ.
- (3) A の固有多項式 (= f の固有多項式) $F_A(\lambda) = |\lambda E - A|$ を求めよ. (結果として, 各 μ_i は固有方程式 $F_A(\lambda) = 0$ の解であることが分かる.)
- (4) $\mu \in \mathbb{R}$ を A の任意の固有値とする. このとき, μ は μ_1, \dots, μ_n のいずれかと一致し, 固有方程式 $F_A(\lambda) = 0$ の解としての μ の重複度 (固有値 μ の重複度と呼ぶ) と, μ に対する A の固有空間 (= f の固有空間) $V_\mu = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}\}$ の次元が等しくなることを示せ.

【注意】 上の問題は「線形教科書の定理 13.7 の必要性の証明」に対応している. 命題 13.6 と併せて, \mathbb{R}^n の線形変換 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (あるいは行列 A) が対角化可能であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである:

- 固有方程式 $F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ の解 (= A の固有値) がすべて実数.
- A の各固有値 μ に対して, (固有値 μ の重複度) = (固有空間 V_μ の次元).

上の議論を逆に辿れば対角化の手順が了解される (線形教科書 p.93 参照).