2018 年度 数学演習第二 中間統一試験 解答例＋解説

1 $f(x,y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 3x$.

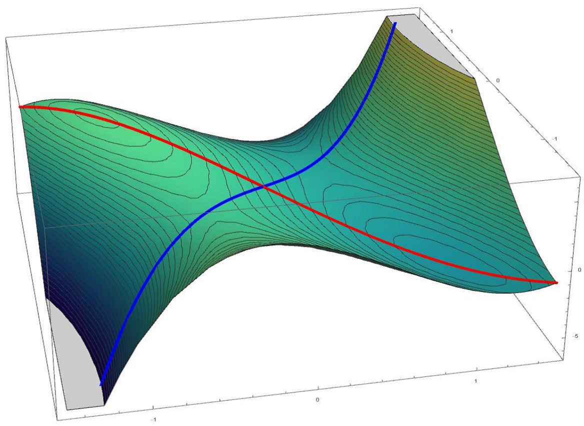
(1) $f_x = \boxed{9x^2 + 6xy - 3}$.

(2) $f_{xy} = \boxed{6x}$.

(3) $f_y = 3x^2 - 3y^2$．$f_x(-1,2) = -6$．$f_y(-1,2) = -9$.
よって求める接平面の方程式は，$z + 2 = -6(x+1) - 9(y-2)$．つまり $\boxed{6x + 9y + z = 10}$.

(4) $f_y = 0$ のとき，$x^2 = y^2$．$y = x$ のとき，$f_x = 0$ は $15x^2 - 3 = 0$．よって $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$．また $y = -x$ のとき，$f_x = 0$ は，$3x^2 - 3 = 0$．よって $x = \pm 1$．以上から，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる $(a,b) = \boxed{\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right), (\pm 1, \mp 1)\ \text{(複号同順)}}$.

$f_{xx} = 18x + 6y$，$f_{yy} = -6y$ より，ヘッセ行列式 $D(x,y) = (18x+6y)(-6y) - 36x^2 = -36(x^2 + y^2 + 3xy)$．従って，$D\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -36 < 0$ (複号同順) であり，$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ は極値をとらない．また，$D(\pm 1, \mp 1) = 36 > 0$ となり $(\pm 1, \mp 1)$ は極値を取る．$f_{xx}(1,-1) = 12 > 0$, $f_{xx}(-1,1) = -12 < 0$ であることに注意すると，$f(x,y)$ が極大となる点は $\boxed{(-1,1)}$，極小となる点は $\boxed{(1,-1)}$ である．



曲面 $z = f(x,y)$ の概形と等高線.
青が $y = x$ との交わり（2 つの鞍点がある）.
赤が $y = -x$ との交わり（極大点と極小点がある）.

2 $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$.

(5) $f_y = \dfrac{\frac{-x}{(1+y)^2}}{1 + \left(\frac{x}{1+y}\right)^2} = \boxed{-\dfrac{x}{x^2 + (1+y)^2}}$.

(6) まず $f_x = \dfrac{\frac{1}{1+y}}{1 + \left(\frac{x}{1+y}\right)^2} = \dfrac{1+y}{x^2 + (1+y)^2}$．連鎖律から $z'(t) = f_x x'(t) + f_y y'(t) = \dfrac{(1+y)t}{x^2 + (1+y)^2} - \dfrac{xe^t}{x^2 + (1+y)^2}$．ここで $t = 2$ のとき，$x(2) = 2, y(2) = e^2$ であることに注意して上式に代入すると，$z'(2) = \dfrac{(1+e^2)\cdot 2 - 2e^2}{4 + (1+e^2)^2} = \boxed{\dfrac{2}{e^4 + 2e^2 + 5}}$.

(7) 連鎖律から $g_u = f_x\varphi_u + f_y\psi_u = \dfrac{1+y}{x^2+(1+y)^2}\cdot(-e^{-u}\cos v) - \dfrac{x}{x^2+(1+y)^2}\cdot(-e^{-u}\sin v)$．ここで $u=0, v=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\varphi\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\psi\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ であることに注意して上式に代入すると，$g_u\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+(1+\frac{1}{2})^2}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}+(1+\frac{1}{2})^2}\cdot(-\frac{1}{2}) = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$.

(8) $(\mathrm{Tan}^{-1}(t))' = \dfrac{1}{1+t^2} = 1-t^2+t^4-\cdots$ を積分して，$\mathrm{Tan}^{-1}(t) = t + o(t^2)$．また，$\dfrac{x}{1+y} = x(1-y+y^2)+o(r^3)$ であることに注意すれば，$\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{1+y}\right) = x(1-y)+o(r^2) = \boxed{x-xy}+o(r^2)$.

3 $f(x,y)$ を C^2 級関数とし，$\varphi(u,v) = u^2+v^2, \psi(u,v) = uv$.

連鎖律から，$g_u = f_x\varphi_u + f_y\psi_u = 2uf_x + vf_y$．さらに連鎖律から，

$$\begin{aligned} g_{uu} &= 2f_x + 2u(f_x)_u + v(f_y)u = 2f_x + 2u(f_{xx}\varphi_u + f_{xy}\psi_u) + v(f_{yx}\varphi_u + f_{yy}\psi_u) \\ &= 2f_x + 2u(2uf_{xx} + vf_{xy}) + v(2uf_{yx} + vf_{yy}) \end{aligned}$$

となる．$f(x,y)$ は C^2 級だから $f_{xy} = f_{yx}$ であることに注意して整理すると

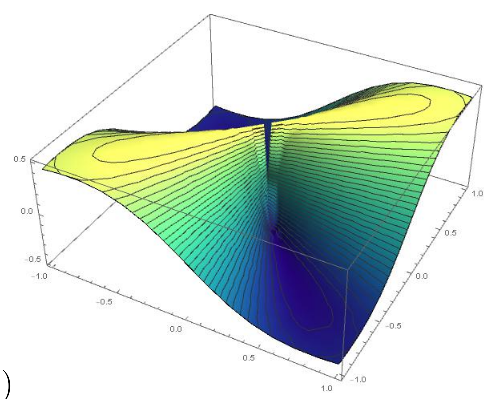
$$g_{uu} = \boxed{4u^2}f_{xx} + \boxed{4uv}f_{xy} + \boxed{v^2}f_{yy} + 2f_x.$$

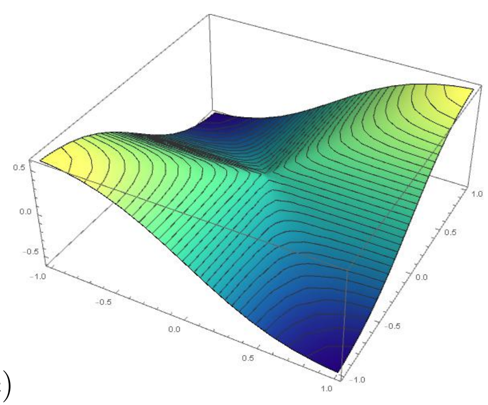
4

まず $y=x$ かつ $x>0$ で考える．このとき，$\dfrac{\sin xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sin(x^2)}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}x}\cdot\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ となるから，$x\to+0$ で第 1 項が発散し，第 2 項が 1 に収束することに注意すれば，極限値 (a) は存在しない．

同様に，$y=x$ かつ $x>0$ で $\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ となる．これは $x\to+0$ で $\dfrac{1}{2}$ に収束する．しかし，$y=-x$ かつ $x>0$ では，$\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin(-x^2)}{(-x^2)}$ となり，$x\to+0$ で $-\dfrac{1}{2}$ に収束する．以上より，極限値 (b) も存在しない．

最後に，$\left|\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqq \left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|x\cdot\sqrt{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}\right| \leqq |x| \to 0$ $((x,y)\to(0,0))$ であることに注意すれば，極限値 (c) は存在する．以上により，3 つの極限値のうち，存在するのは $\boxed{\text{(c)}}$.


(b)


(c)

$\boxed{\mathbf{5}}$

(11) $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \boxed{\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}$.

(12) $\boldsymbol{v} - k(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 1+4k \\ 4k \\ -2k \end{bmatrix}$ が $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ と垂直になるための条件は，$\begin{bmatrix} 1+4k \\ 4k \\ -2k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} =$ $-4(1+4k) - 16k - 4k = -4 - 36k = 0$ より $k = -\dfrac{1}{9}$．よって，$\boldsymbol{v}$ の H への正射影ベクトルは，

$\boldsymbol{v} + \dfrac{1}{9}(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) = \boxed{\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}$.

(13)(14)(15)

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

また，

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 | \boldsymbol{v}] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

以上より，$\mathbb{R}^3$ の基底となっているのは，$\boxed{\mathcal{B}}$．このとき $\boldsymbol{v}$ の $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \boxed{\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$.

さらに，$\mathcal{A}$ の 3 つの列ベクトルの間に成り立つ非自明な一次関係式の一例は，$\boxed{-5\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ W を定義する同次連立一次方程式の係数行列を行基本変形する．

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -3 & 6 \\ -5 & 10 & -17 & 0 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{17}{8} & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k+6 \end{bmatrix}$$

(16) $\dim W = 2$ となる必要十分条件は，上の行列の階数が 3 となることであるから，求める条件は，$k+6 \neq 0$，つまり $\boxed{k \neq -6}$.

(17) このとき，上の行列の簡約行列は，$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{17}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．従って，W に属する元は，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{17}{8} \\ 0 \\ -\frac{5}{8} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって W の基底の一例は，$\left(\begin{bmatrix}\boxed{2}\\1\\\boxed{0}\\0\\\boxed{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\boxed{17}\\0\\\boxed{-5}\\8\\\boxed{0}\end{bmatrix}\right)$．

$\boxed{\mathbf{7}}$

(18)

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&7\\-4&-2&2\\-3&3&a\\4&-1&-17\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&6&30\\0&9&a+21\\0&-9&-45\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&1&5\\0&0&a-24\\0&0&0\end{array}\right]$$

となることから，求める条件は，$\boxed{a=24}$．

(19) 上の変形の第 1 列と第 2 列から，$\dim W_1=2$ で $\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\-4\\-3\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\3\\-1\end{bmatrix}\right)$ が基底の一例となる．

また，$\dim W_2=2$ で，基底の一例は $\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$．

$$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\-4&-2&3&2\\-3&3&1&0\\4&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&6&7&6\\0&9&4&3\\0&-9&-4&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{4}{3}&-1\\0&1&\frac{7}{6}&1\\0&0&-\frac{13}{2}&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{3}{13}\\0&1&0&-\frac{1}{13}\\0&0&1&\frac{12}{13}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

より，$\dim(W_1+W_2)=\boxed{3}$．次元公式から，$\dim(W_1\cap W_2)=\boxed{1}$．

(20) 上の計算から，$-3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-12\boldsymbol{b}_1+13\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が成り立つ．これは $-3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=12\boldsymbol{b}_1-13\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}-1\\10\\12\\-13\end{bmatrix}\in W_1\cap W_2$ を意味している．$\dim(W_1\cap W_2)=1$ だから，零でない列ベクトルをひとつ見つければそれが基底となる．その一例は，$\boxed{\left(\begin{bmatrix}-1\\10\\12\\-13\end{bmatrix}\right)}$．