2018年度 数学演習第二 中間統一試験 問題用紙　2018.11.28 実施 (90 分)

・解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと．
・簡潔な解答になるよう努めること．不十分と判断された解答には得点を与えないことがある．

1　$f(x,y)=3x^3+3x^2y-y^3-3x$ とする．

(1) 1 階偏導関数 f_x を求めよ．

(2) 2 階偏導関数 f_{xy} を求めよ．

(3) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(-1,2,-2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(4) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) は，$\boxed{\text{(あ)}}$ である．
そのうち $f(x,y)$ が極大となる点は $\boxed{\text{(い)}}$，$f(x,y)$ が極小となる点は $\boxed{\text{(う)}}$ である．
(あ),(い),(う) にあてはまるすべての座標を解答欄に記入せよ．ただし，存在しない場合には「なし」と記入すること．

2 $f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$ とする．

(5) 偏導関数 f_y を求めよ．

(6) $x(t)=\dfrac{t^2}{2}, y(t)=e^t$ とし，合成関数 $z(t)=f(x(t),y(t))$ を考える．$z(t)$ の導関数 $z'(t)$ に対して，$z'(2)$ の値を求めよ．

(7) $\varphi(u,v)=e^{-u}\cos v, \psi(u,v)=e^{-u}\sin v$ とし，合成関数 $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ を考える．$g(u,v)$ の u に関する偏導関数 $g_u(u,v)$ について，$g_u\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ．

(8) $f(x,y)$ の $(0,0)$ における 2 次の項までのマクローリン展開

$$f(x,y)=\underline{a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2}+o(r^2)\quad (r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0)$$

を求め，下線部に相当する部分のみを解答欄に記入せよ．

3　$f(x,y)$ を C^2 級関数とし，$\varphi(u,v)=u^2+v^2, \psi(u,v)=uv$ とおく．

(9) 合成関数 $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ を考える．このとき，2 階偏導関数

$$g_{uu}=\boxed{\text{(a)}}f_{xx}+\boxed{\text{(b)}}f_{xy}+\boxed{\text{(c)}}f_{yy}+2f_x$$

が成り立つ．$(a),(b),(c)$ にあてはまる適切な u,v の式を解答欄に記入せよ．

4

(10) 次の 3 つの極限値のうち，存在するものをすべて記号で答えよ．ただし，すべて存在しない場合には「なし」と記入すること．

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{x^2+y^2}$　(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次で与えられる $\mathbb{R}^3$ のベクトルを考える．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(11) 外積 $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ を求めよ．

(12) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ で張られる $\mathbb{R}^3$ の平面を H とするとき，$\boldsymbol{v}$ の H への正射影を求めよ．

(13) 3 つの列ベクトルの組 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\quad \mathcal{B} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4)$ とする．
$\mathbb{R}^3$ の基底となっているのは $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ のどちらか．記号で答えよ．

(14) (13) で答えた基底に関して，$\boldsymbol{v}$ の座標を求めよ．

(15) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ のうち，$\mathbb{R}^3$ の基底となっていない方の 3 つの列ベクトルの間に成り立つ非自明な一次関係式をひとつ求めよ．ただし，係数がすべて整数となっているものを答えること．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\mathbb{R}^5$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{r} -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 \phantom{{}+6x_5} = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ -5x_1 + 10x_2 - 17x_3 \phantom{{}-3x_4} + kx_5 = 0 \end{array} \right\}$ を考える．

(16) $\dim W = 2$ となるための k の条件を求めよ．

(17) k が (16) をみたすとき，基底の一例として，$\left(\begin{bmatrix} \square \\ 1 \\ \square \\ 0 \\ \square \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \square \\ 0 \\ \square \\ 8 \\ \square \end{bmatrix} \right)$ の形のものがとれる．空所にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\mathbb{R}^4$ の 2 つの部分空間 W_1, W_2 を次で定義する．

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(18) $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ a \\ -17 \end{bmatrix} \in W_1$ となるための a の条件を求めよ．

(19) 和空間 $W_1 + W_2$ の次元は $\boxed{(ア)}$ であり，共通部分 $W_1 \cap W_2$ の次元は $\boxed{(イ)}$ である．(ア),(イ) にあてはまる適切な数値を解答欄の所定の位置に記入せよ．

(20) $W_1 \cap W_2$ の基底の一例を求めよ．ただし，整数を成分とする列ベクトルを用いること．