数学演習第二・期末統一試験【解説】 (2019 年 1 月 30 日実施)

$\boxed{1}$ (1) $g(a,b)=0$ なる点 (a,b) において, $g_y(a,b)=\boxed{3b^2-a\neq 0}$ であれば, $y=\varphi(x)$ の形の $g(x,y)=0$ の陰関数の一意存在が保証される.

(2) $x=a$ のまわりで $x^3+y^3-xy-1=0$ $(y=\varphi(x))$ を x で微分し,

$$3x^2+3y^2y'-y-xy'=0. \qquad \therefore\ (3y^2-x)y'=-(3x^2-y).$$

これより, $\varphi'(a)=\boxed{-\dfrac{3a^2-b}{3b^2-a}}$.

(3) (2) で得た $(3y^2-x)y'=-(3x^2-y)$ を更に x で微分して,

$$(3y^2-x)y''+(6yy'-1)y'=(6x-y'). \qquad \therefore\ y''=-\frac{(6yy'-2)y'+6x}{3y^2-x}.$$

特に, $(a,b)=(1,-1)$ のとき, $\varphi(1)=-1$ より,

$$\varphi'(1)=-\frac{3+1}{3-1}=-2, \quad \varphi''(1)=-\frac{(12-2)(-2)+6}{3-1}=7.$$

よって, $\varphi(x)$ の $x=1$ における漸近展開の係数は

$$c_0=\varphi(1)=\boxed{-1}, \quad c_1=\varphi'(1)=\boxed{-2}, \quad c_2=\frac{\varphi''(1)}{2}=\boxed{\frac{7}{2}}.$$

(4) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x+y-\lambda(x^3+y^3-xy-1)$ とおいて,

$$\begin{cases} F_x=1-\lambda(3x^2-y)=0 \\ F_y=1-\lambda(3y^2-x)=0 \\ -F_\lambda=x^3+y^3-xy-1=0 \end{cases}$$

を解く (Lagrange の未定乗数法). まず最初の 2 式より,

$$3x^2-y=3y^2-x\left(=\frac{1}{\lambda}\right). \quad \therefore\ (x-y)\{3(x+y)+1\}=0.$$

これより, $x-y=0$ または $x+y=-1/3$ であるから, 更に第 3 式を用いて,

- $x-y=0$ なら, $2x^3-x^2-1=(x-1)(2x^2+x+1)=0$ より, $(x,y)=(1,1)$.
- $x+y=-1/3$ なら,

$$x^3+y^3-xy-1=(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}-xy-1=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-1\neq 0$$

となり, $g(x,y)=0$ を満たし得ない.

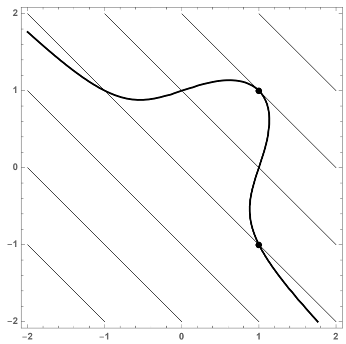
よって, $(x,y,\lambda)=(1,1,1/2)$ が解となり, 点 $(1,1)$ が極値を与える点の候補となる. $(1,1)$ のまわりで $g(x,y)=0$ が定める陰関数 $y=\varphi(x)$ ((3) の $\varphi(x)$ とは異なる) を考えれば, 上の計算より,

$$\varphi(1)=1, \quad \varphi'(1)=-1, \quad \varphi''(1)=-7.$$

よって, $h(x):=x+\varphi(x)$ は

$$h(1)=2,\ h'(1)=1+\varphi'(1)=0,\ h''(1)=\varphi''(1)=-7<0$$

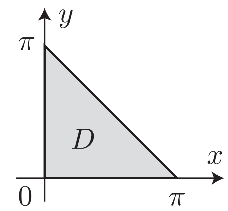
を満たす. 従って, $g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)=x+y$ は $\boxed{\text{点 }(1,1)\text{ で極大値 }2\text{ をとる}}$.



【補足】① 厳密に言えば, 上に書いたことだけでは不十分で, 曲線 $g(x,y)=0$ 上に $g_x=g_y=0$ を満たす点 (g の特異点) がない (あったとしてもその点では f が極値をとらない) ことを確認

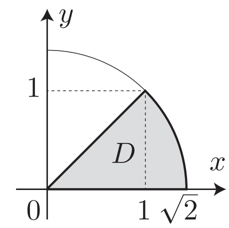
する必要がある．実は, 上で行った計算からそのことが確認できる．実際, $g_x = g_y = 0$ から $x - y = 0$ または $x + y = -1/3$ が導かれ, $x = y$ なら $g_y(1,1) = 2 \neq 0$ となり, $x + y = -1/3$ なら $g(x, y) \neq 0$ となる．② $f(x, y) = x + y$ が簡単な形なので, 次のように考えることもできる．$g = 0$ のもとで f が極値をとる点 (a, b) があり, その点のまわりで $g = 0$ が陰関数 $y = \varphi(x)$ をもつとすれば, $h(x) := f(x, \varphi(x)) = x + \varphi(x)$ に対して $h'(a) = 1 + \varphi'(a) = 0$ が成り立つので, $\varphi'(a) = -\dfrac{3b^2 - a}{3a^2 - b} = -1$. あとは $g(a, b) = 0$ と連立させて上と同様に議論できる．

$\boxed{2}$ (5) 累次積分により,



$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi - x} \sin(x + y)\, dy = \int_0^{\pi} \Big[-\cos(x + y) \Big]_{y=0}^{y=\pi - x} dx \\
&= \int_0^{\pi} (1 + \cos x)\, dx = \boxed{\pi}.
\end{aligned}
$$

(6) 極座標変換を用いて,



$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2} \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}}} (r\cos\theta)(r\sin\theta)^2\, r\, dr d\theta \\
&= \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^4\, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta \right) \\
&= \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3} \sin^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2^{5/2}}{5} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^{3/2}} = \boxed{\frac{2}{15}}.
\end{aligned}
$$

次のように, 累次積分だけで計算することもできる．

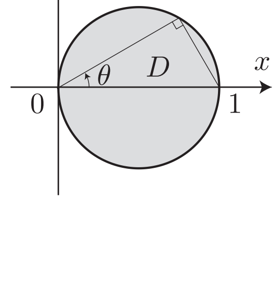
$$
(\text{与式}) = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2 - y^2}} xy^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \{(2 - y^2) - y^2\} y^2\, dy = \int_0^1 (y^2 - y^4)\, dy = \frac{2}{15},
$$

あるいは

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^1 dx \int_0^x xy^2\, dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2 - x^2}} xy^2\, dy = \frac{1}{3} \int_0^1 x^4\, dx + \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{2}} x(2 - x^2)^{3/2}\, dx \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 + \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{5} (2 - x^2)^{5/2} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

(7) 円 $x^2 + y^2 = x$ は極座標 (r, θ) で

$$
r = \cos\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right)
$$



と表されるので, 極座標変換を用いて,

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}}} (1 - r^2)\, r\, dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} (r - r^3)\, dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{\cos^4\theta}{4} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{5\pi}{32}}.
\end{aligned}
$$

(8) 積分領域 E は, 平面領域

$$
D:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1 \quad (\text{あるいは } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x)
$$

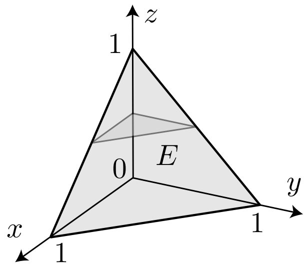
で定義された 2 つの関数 $z = 0$ と $z = 1 - x - y$ のグラフで挟まれた部分である．よって, 累次

積分により，

$$(\text{与式}) = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_D (1-x-y)^2\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[-\frac{1}{3}(1-x-y)^3 \Big]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,dx = \boxed{\frac{1}{24}}.$$



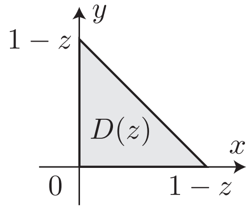
【別法】 E の平面 $z=z_1$ による切り口が

$$D(z_1) := \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1-z_1\} \quad (0 \leqslant z_1 \leqslant 1)$$

と表されるから，

$$(\text{与式}) = \int_0^1 dz \iint_{D(z)} z\,dxdy = \int_0^1 z\,(D(z)\ \text{の面積})\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 z(1-z)^2\,dz = \boxed{\frac{1}{24}}.$$



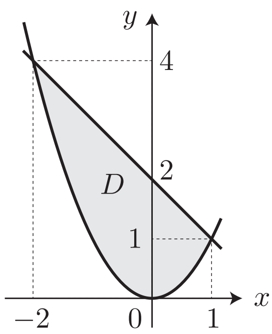
$\boxed{3}$ (9) 累次積分 $I = \displaystyle\int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$ は

$$D:\ -2 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2-x$$

上の重積分と考えられるから，

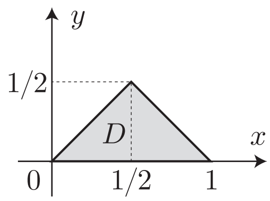
$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{\boxed{1}} dy \int_{\boxed{-\sqrt{y}}}^{\boxed{\sqrt{y}}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{1}}^{\boxed{4}} dy \int_{\boxed{-\sqrt{y}}}^{\boxed{2-y}} f(x,y)\,dx.$$



$\boxed{4}$ (10) $x+y=u,\ x-y=v$ とおけば，$x = \dfrac{u+v}{2}$，$y = \dfrac{u-v}{2}$ であるから，(x,y) の (u,v) に関する Jacobian は

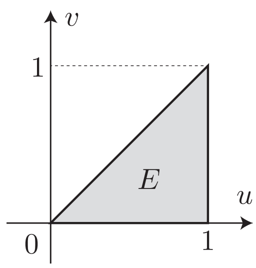
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$



また，D は

$$E:\ \ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \boxed{0} \leqslant v \leqslant \boxed{u}$$

に写される（「1 次変換では三角形の頂点同士が対応する」ことに注目すれば，E の形が容易に分かる）．よって，この変数変換により，



$$J = \iint_E \frac{v}{1+u^2}\left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \boxed{\frac{1}{2}} \iint_E \frac{v}{1+u^2}\,dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^u \frac{v}{1+u^2}\,dv = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+u^2}\Big) du = \frac{1}{4}\Big[u - \mathrm{Tan}^{-1} u \Big]_0^1 = \boxed{\frac{4-\pi}{16}}.$$

$\boxed{5}$ A は行基本変形により

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & k \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & (k \neq -1) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & (k = -1) \end{cases}$$

と簡約化されるので, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ であることが分かる.

(11) $\dim \operatorname{Ker} f = d_1 = 1$ となる k の条件は $\boxed{k \neq -1}$, $\operatorname{Ker} f$ の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}$.

(12) $\dim \operatorname{Ker} f = d_2 = 2$ となる k の条件は $\boxed{k = -1}$, $\operatorname{Ker} f$ の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}$.

(13) $k \neq -1$ のとき, $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_3 \ \boldsymbol{a}_4] \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ と行基本変形される. 行基本変形により行列の列ベクトルの間の 1 次関係は変わらないから, 最後の形を見て $\boxed{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4)}$ と選べばよいことが分かる ($\boldsymbol{a}_4$ を含む 3 つのベクトルの組はすべて正解).

$\boxed{6}$ (14) 座標の定義により, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)[\boldsymbol{b}]_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1 = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}$.

(15) 求める基底変換行列を P とすれば, 定義より $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)P = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. ここで, $U = [\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2 \ \boldsymbol{u}_3]$ ($\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を横に並べた行列) と定めれば, $UP = E$ であるから, $P = U^{-1}$.

$$[U \ E] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [E \ U^{-1}]$$

より, $P = U^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$.

(16) 求める表現行列を N とすれば, 定義より $(g(\boldsymbol{u}_1), g(\boldsymbol{u}_2), g(\boldsymbol{u}_3)) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)N$. ここで, $g(\boldsymbol{u}_i) = M\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ であるから, 上の関係式は

$$MU = [M\boldsymbol{u}_1 \ M\boldsymbol{u}_2 \ M\boldsymbol{u}_3] = [\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2 \ \boldsymbol{u}_3]N = UN$$

と書かれる. よって,

$$N = U^{-1}MU = U^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}.$$

(17) $MU = UN$ より,

$$[M\boldsymbol{u}_1\ \ M\boldsymbol{u}_2\ \ M\boldsymbol{u}_3] = [\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2\ \ -\boldsymbol{u}_3].$$

よって, $M\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1$, $M\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \nparallel \boldsymbol{u}_2$ (平行でない), $M\boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{u}_3$ となるので, $\boxed{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3}$ が求めるベクトルである.

$\boxed{7}$ (18) $\det(\lambda E - B) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & 3 \\ 3 & \lambda+4 & -3 \\ 3 & 3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda+4) + 27 + 27 + 9(\lambda-2) + 9(\lambda-2) - 9(\lambda+4)$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda - 2 = \boxed{(\lambda+1)^2(\lambda-2)}.$$

(19) B の最小固有値は -1 であり,

$$(-1)E - B = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, 最小固有値 -1 の固有空間の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$.

(20) B の -1 以外の固有値は 2 のみであり,

$$2E - B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, 固有値 2 の固有空間の基底は $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. よって, $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば,

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}B^nP = (P^{-1}BP)^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

更に,

$$[P\ \ E] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

より, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. よって,

$$B^n\boldsymbol{e}_1 = P(P^{-1}BP)^nP^{-1}\boldsymbol{e}_1 = P\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n \\ (-1)^n \\ -2^n \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2^n \\ (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n \end{bmatrix}}.$$