数学演習第二・期末統一試験【問題用紙】

2019 年 1 月 30 日実施 ・ 試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみ記入せよ —

$\boxed{1}$ 2 変数関数 $g(x,y)=x^3+y^3-xy-1$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $g(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) のまわりで, $g(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ の形の陰関数をもつことを保証する条件を「$(a,b$ の式$)\neq 0$」という形式で書け. (このとき $\varphi(x)$ は $x=a$ のまわりで C^∞ 級となる.)

(2) 点 (a,b) が (1) の条件を満たすとき, $\varphi'(a)$ を a,b の式で表せ.

(3) $(a,b)=(1,-1)$ のとき, $\varphi(x)$ の $x=1$ における漸近展開

$$\varphi(x)=c_0+c_1(x-1)+c_2(x-1)^2+o((x-1)^2)\quad(x\to 1)$$

の係数 c_0,c_1,c_2 を求めよ.

(4) $g(x,y)=0$ の条件のもとで $f(x,y)=x+y$ は極値をとるか?「点 (a,b) で極大値 c をとる」または「点 (a,b) で極小値 c をとる」または「極値をとらない」という形式で答えよ.

$\boxed{2}$ 次の重積分または 3 重積分を計算せよ.

(5) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dxdy,\qquad D:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant\pi.$

(6) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy,\qquad D:\ x^2+y^2\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant x.$

(7) $\displaystyle\iint_D (1-x^2-y^2)\,dxdy,\qquad D:\ x^2+y^2\leqslant x.$

(8) $\displaystyle\iiint_E z\,dxdydz,\qquad E:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y+z\leqslant 1.$

$\boxed{3}$ (9) 累次積分 $I=\displaystyle\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換すると,

$$I=\int_0^{\boxed{①}}dy\int_{\boxed{②}}^{\boxed{③}}f(x,y)\,dx+\int_{\boxed{①}}^{\boxed{④}}dy\int_{\boxed{⑤}}^{\boxed{⑥}}f(x,y)\,dx$$

となる. このとき, ① から ⑥ に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

$\boxed{4}$ (10) 重積分

$$J=\iint_D\frac{x-y}{1+(x+y)^2}\,dxdy,\qquad D:\ 0\leqslant y\leqslant x,\ x+y\leqslant 1,$$

を考える. $x+y=u,\ x-y=v$ とおいて変数変換するとき, D は

$$E:\ \ 0\leqslant u\leqslant 1,\ \boxed{①}\leqslant v\leqslant\boxed{②}$$

に移されるので,

$$J=\boxed{③}\iint_E\frac{v}{1+u^2}\,dudv=\boxed{④}$$

となる. このとき, ① から ④ に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

5 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & k \end{bmatrix}$ (k は定数) の定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$) に対して, f の核 $\operatorname{Ker} f$ の次元 $\dim \operatorname{Ker} f$ は k の値によって 2 つの値をとりうる. それを d_1, d_2 ($d_1 < d_2$) として, 次の問いに答えよ.

(11) $\dim \operatorname{Ker} f = d_1$ となる k の条件と, そのときの $\operatorname{Ker} f$ の基底を書け.

(12) $\dim \operatorname{Ker} f = d_2$ となる k の条件と, そのときの $\operatorname{Ker} f$ の基底を書け.

ただし, <u>(11), (12) において</u>, 基底をなすベクトルには第 3 成分, 第 4 成分の一方が 0 で他方が 1 であるものを用いよ (標準的な方法なら自然にそのような基底が得られる).

(13) $\dim \operatorname{Ker} f = d_1$ となるとき, $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4]$ の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ のうちのいくつかを並べて $\operatorname{Im} f$ の基底を作れ.

6 $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく. このとき, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$, 標準基底 $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ および行列 M の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $g(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$) に関して, 次の問いに答えよ. ただし, (14) から (16) のベクトルや行列は成分表示すること.

(14) ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標が $[\boldsymbol{b}]_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{e}_1$ であるとき, $\boldsymbol{b}$ $(= [\boldsymbol{b}]_{\mathcal{E}})$ を求めよ.

(15) 基底 $\mathcal{B}$ から $\mathcal{E}$ への基底変換行列を求めよ.

(16) 線形変換 g の基底 $\mathcal{B}$ に関する表現行列を求めよ.

(17) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ の中に行列 M の固有ベクトルは存在するか. 存在するならすべて挙げ, 存在しないなら「存在しない」と書け.

7 行列 $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(18) 行列 B の固有多項式 $\det(\lambda E - B)$ を因数分解した形で求めよ.

(19) B の最小固有値に対する固有空間の基底を書け.

(20) $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ と表すとき, $B^n \boldsymbol{e}_1$ (n は自然数) を計算せよ.