

数学演習第一 (第1回) 微積: 極限值, 逆三角関数

2019年4月24日

1 (演習書 問題 2.2.1 (2), (6), (7), (8), (11), (12), (13), (14)) 次の極限值を求めよ.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \qquad (6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x} \qquad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x)}{\tan x} \qquad (11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} \qquad (13) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad (14) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}$$

- 次の極限值が基本: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.
- (12), (13) については, まず対数をとった関数の極限值を求めよ.

2 (演習書 問題 2.3.1 [改題]) 次の値を求めよ

$$(1) \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad (2) \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (3) \sin^{-1}\left(\sin \frac{3\pi}{5}\right)$$

$$(4) \cos^{-1}\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) \qquad (5) \sin(\tan^{-1}(-2)) \qquad (6) \tan\left(\sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

3 (演習書 問題 2.3.3 (1), (2), (3)) 次の方程式を解け.

$$(1) \cos^{-1} x = \tan^{-1} 2 \qquad (2) \sin^{-1} x + 2 \sin^{-1} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \tan^{-1} x + 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

4 (演習書 問題 2.3.4 [改題]) 次の関係式を示せ.

$$(1) \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \qquad (2) \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0)$$

5 (時間が余ったら解くこと)

双曲線関数

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

について, 次の問いに答えよ.

- (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ. 但し, $\cosh^2 x = (\cosh x)^2$, $\sinh^2 x = (\sinh x)^2$ (三角関数と同様な記法).
- (2) $y = \sinh x$ および $y = \tanh x$ の逆関数をそれぞれ求めよ.
- (3) $y = \cosh x$ ($x \geq 0$) および $y = \cosh x$ ($x \leq 0$) の逆関数をそれぞれ求めよ.