数学演習第一（第 1 回）微積：極限値, 逆三角関数　解答例　(2019 年 4 月 24 日実施)

$\boxed{1}$ (1) まず, $\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\cdot\log a\to\log a\ (x\to 0)$. これを用いて, $\dfrac{a^x-b^x}{x}=\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}\to\log a-\log b=\log\dfrac{a}{b}\ (x\to 0)$. 【別法】$\dfrac{a^x-b^x}{x}=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-1}{x}\cdot b^x\to\log\dfrac{a}{b}\ (x\to 0)$.

(6) $y=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおくと, $x\to\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y\to 0$. このとき, $\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1}{y}=\dfrac{\cos y-1}{y}=-\dfrac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)}=\dfrac{-\sin^2 y}{y(1+\cos y)}=\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^2\dfrac{-y}{1+\cos y}\to 1\cdot 0=0$.

(7) $\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}=\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}\cdot\cos x=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}\to\dfrac{1}{2}\ (x\to 0)$.

【注】 (6), (7) の解答例では, $1-\cos x$ を $1-\cos x=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ と変形したが, 半角の公式により $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ と変形する方法もよく用いられる. この変形から容易に得られる極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ は基本的.

(8) $x\to 0$ のとき, $\sin x\to 0$ であるから, $\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\dfrac{\cos x}{\cos(\sin x)}\to 1$. あるいは, $\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x\to 1$ を用いて, $\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\dfrac{\tan(\sin x)}{\sin x}\dfrac{x}{\tan x}\dfrac{\sin x}{x}\to 1$.

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと, $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to+0$. このとき, $\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x=y\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\dfrac{y}{\tan y}=\dfrac{y}{\sin y}\cdot\cos y\to 1$.

(12) 自然対数をとって考える. $y=x-1$ とおけば, $x\to 1$ のとき $y\to 0$ であり, $\log x^{\frac{1}{1-x}}=\dfrac{\log x}{1-x}=\dfrac{\log(1+y)}{-y}\to -1$. よって, $x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\log x^{\frac{1}{1-x}}}\to e^{-1}\ (=1/e)$.

(13) 自然対数をとって考える. $\cos x=1+(\cos x-1)$ と分解し, (7) と同様な計算を用いて ((7) の【注】も参照), $\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}=\dfrac{\log(1+\cos x-1)}{x^2}=\dfrac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\to 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ (x\to 0)$. よって, $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}\to e^{-1/2}\ \left(=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

【注】 関数 $f(x)^{g(x)}$ の ($x\to a$ での) 極限値を求めるためには, log をとった関数 $\log f(x)^{g(x)}=g(x)\log f(x)$ の極限値が求まればよい. 実際, log をとる操作は “e の肩に載せた表現” (ここでは $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\log f(x)}$ という変形) を与えるから, 指数関数 e^x の連続性により $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)}$ が成り立つ.

(14) $x\to+0$ のとき $\sin x\to+0$, $\log(\sin x)\to-\infty$ より, $\dfrac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}=\dfrac{\log(\sin 2x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)-\log(\cos x)}=\dfrac{\log(\sin x)+\log(2\cos x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)-\log(\cos x)}=\dfrac{1+\frac{\log(2\cos x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)}}{1-\frac{\log(\cos x)}{\log(\sin x)}}\to 1$.

$\boxed{2}$ (1) $x=\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと, $\cos x=-\dfrac{1}{2}\ (0\le x\le\pi)$ より, $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2) $x=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと, $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より, $x=\dfrac{\pi}{6}$.

(3) $x=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$ とおくと, $\sin x=\sin\dfrac{3\pi}{5}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ より, $x=\pi-\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{2\pi}{5}$.

(4) $x=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)$ とおくと, $\cos x=\cos\dfrac{6\pi}{5}\ (0\le x\le\pi)$ より, $x=2\pi-\dfrac{6\pi}{5}=\dfrac{4\pi}{5}$.

(5) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ とおいて, $\sin\alpha$ の値を求める．$\tan\alpha = -2 \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 5$ となり, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. よって, $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

【別法】$\tan\alpha < 0$ より $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ となるので, $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$ から $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

(6) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ とおいて, $\tan\alpha$ の値を求める．$\sin\alpha = -\frac{1}{3} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{8}{9}$ となり, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. よって, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-1/3}{2\sqrt{2}/3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

$\boxed{3}$ (1) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1} 2$ とおくと, $\tan\alpha = 2 > 0$ かつ $\mathrm{Cos}^{-1} x = \alpha$. このとき, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから, $\mathrm{Cos}^{-1} x = \alpha$ は解をもち, $x = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ で与えられる.

(2) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{4}$ とおくと, $\sin\alpha = \frac{1}{4} > 0$ かつ $\mathrm{Sin}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\alpha < \frac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{8}$ で与えられる.

(3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}$ とおくと, $\tan\alpha = \frac{1}{3} \in (0,1)$ かつ $\mathrm{Tan}^{-1} x = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ であるから, $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 2\alpha < \frac{\pi}{4}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha} = \frac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha}$ で与えられる．ここで, $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{3}{4}$ であるから, $x = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$ となる.

【注】この種の方程式は解をもたないことがある．例えば, $\mathrm{Cos}^{-1} x = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ は (1) と似ているが, 解をもたない．実際, $\mathrm{Tan}^{-1}(-2) \in (-\pi/2, 0)$ は関数 $\mathrm{Cos}^{-1} x$ の値域 $[0, \pi]$ に含まれない.

$\boxed{4}$ (1) $\theta = \mathrm{Sin}^{-1} x$ とおくと, $\sin\theta = x$ $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$. このとき $x = \sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta)$ かつ $0 \leq \pi/2 - \theta \leq \pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により, $\pi/2 - \theta = \mathrm{Cos}^{-1} x$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x + \mathrm{Cos}^{-1} x = \theta + (\pi/2 - \theta) = \pi/2$.

(2) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおくと, $\tan\theta = x$. ここで, $x > 0$ より $0 < \theta < \pi/2$. このとき,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(\pi/2 - \theta)}{\cos(\pi/2 - \theta)} = \tan(\pi/2 - \theta)$$

かつ $0 < \pi/2 - \theta < \pi/2$ であるから, Tan^{-1} の定義より $\pi/2 - \theta = \mathrm{Tan}^{-1}(1/x)$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1}(1/x) = \theta + (\pi/2 - \theta) = \pi/2$.

【注】 $x < 0$ のときには, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1}(1/x) = -\pi/2$ が成り立つ.

$\boxed{5}$ (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$.

(2) $z = e^x\ (> 0)$ とおくと, $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ より, $z^2 - 2yz - 1 = 0$ となるので, $z = e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. よって, $y = \sinh x$ の逆関数は, $x = \log(y + \sqrt{y^2+1}\,)$.

同様に, $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{z - z^{-1}}{z + z^{-1}} = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ より $z^2 = e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}\ (> 0)$. よって, $y = \tanh x$ の逆関数は, $x = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} \left(= \log\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)$ $(-1 < y < 1)$.

(3) (2) と同様な考え方により, $y = \cosh x$ $(x \geq 0)$ の逆関数は $x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$. また, $y = \cosh x$ $(x \leq 0)$ の逆関数は $x = \log(y - \sqrt{y^2-1})$ $\left(= -\log(y + \sqrt{y^2-1}\,)\right)$.