数学演習第一（演習第２回）　【解答例】

線形：平面の方程式，行列の演算　2019 年 5 月 8 日

1 (1) 平面 P は $\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}\right)=0$ と表される．これを整理して，$\boxed{x-2y+3z+5=0}$.

(2) 直線 ℓ は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$ と表される．これより t を消去して $\boxed{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=z+1}$. 次に, 直線 ℓ 上の点は $(2t+1,-3t+2,t-1)$ と書けるので, 平面 P との交点において $(2t+1)-2(-3t+2)+3(t-1)+5=0$. これより $t=\dfrac{1}{11}$ が得られ, 交点の座標は $\boxed{\left(\dfrac{13}{11},\dfrac{19}{11},-\dfrac{10}{11}\right)}$.

(3) 直線 BH は点 B を通り, $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ を方向ベクトルするから, $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ と表される．よって, 平面 P との交点 H において, $(1+t)-2(2-2t)+3(-1+3t)=-5$. これより $t=\dfrac{1}{14}$ が得られ, 点 H の座標は $\boxed{\left(\dfrac{15}{14},\dfrac{13}{7},-\dfrac{11}{14}\right)}$. また, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ となり, 垂線 BH の長さは $\dfrac{1}{14}\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{14}}}$.

(4) 点 K は直線 ℓ 上の点であるから, $\mathrm{K}(1+2t,2-3t,-1+t)$ と表せる．このとき, $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\begin{bmatrix}1+2t\\2-3t\\-1+t\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+2t\\1-3t\\1+t\end{bmatrix}$ と直線 ℓ は垂直ゆえ, $\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2+2t\\1-3t\\1+t\end{bmatrix}=2(-2+2t)-3(1-3t)+(1+t)=0$. これより $t=\dfrac{3}{7}$ が得られ, 点 K の座標は $\boxed{\left(\dfrac{13}{7},\dfrac{5}{7},-\dfrac{4}{7}\right)}$. また, 垂線 AK の長さは $\sqrt{\left(-\dfrac{8}{7}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{7}\right)^2+\left(\dfrac{10}{7}\right)^2}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{42}}{7}}$.

(5) ①, ② のそれぞれの場合に応じて,「垂線の足」を $\boldsymbol{x}_2$ で表すとする．

① $\boldsymbol{x}_2$ は $\boxed{1}$ の平面上にあるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0)=0$. また, $\boldsymbol{x}_2$ は $\boldsymbol{x}_1$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を方向ベクトルとする直線上にあるから, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}$ と書ける．これら 2 式より, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1+t\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}_0)=0$. これより $t=-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ が得られ, $\boldsymbol{x}_2=\boxed{\boldsymbol{x}_1-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}}$. 更に, 垂線の長さは $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|=\left\|\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}\right\|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. なお, 平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0+d=0$ であるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d$ となり, 垂線の長さは $\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ で与えられる.

② $\boldsymbol{x}_2$ は $\boxed{2}$ の直線上にあるから, $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a}$ と書ける．このとき, $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ はこの直線と垂直ゆえ, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0-t\boldsymbol{a})=0$. よって, $t=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ となり, $\boldsymbol{x}_2=\boxed{\boldsymbol{x}_0+\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}}$. 垂線の長さについては, $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ とおき, $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|^2=\left\|\hat{\boldsymbol{x}}-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}\right\|^2=\|\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-2\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}+\left\|\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}\right\|^2=\|\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}|^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2}=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\hat{\boldsymbol{x}}\|^2-|\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}|^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ より, $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|=\boxed{\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|^2-|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}}$.

2 (1) $-A=\begin{bmatrix}-2&-3\\1&0\\-1&1\end{bmatrix}$,　(2) $2A+3B=\begin{bmatrix}1&9\\-2&6\\8&7\end{bmatrix}$,　(3) $X=\dfrac{1}{2}(4B-3A)=\begin{bmatrix}-5&-\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}&4\\\frac{5}{2}&\frac{15}{2}\end{bmatrix}$.

3 演習書の解答参照.

4 ${}^{\mathrm{t}}A=\begin{bmatrix}1&3\\4&2\\8&7\end{bmatrix}$,　${}^{\mathrm{t}}B=\begin{bmatrix}3&5&2\\6&4&1\end{bmatrix}$,　${}^{\mathrm{t}}(AB)={}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}39&30\\33&33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39&33\\30&33\end{bmatrix}={}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$,

${}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B={}^{\mathrm{t}}(BA)={}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}21&24&66\\17&28&68\\5&10&23\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&17&5\\24&28&10\\66&68&23\end{bmatrix}$.　($\boxed{3}$ で AB, BA を計算した)

5 目の子で探してもよいが, $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ をそれぞれの関係式に代入してみればシステマティックに例が求まる.

まず, $AB=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a+2c & -b+2d \\ a-2c & b-2d \end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a+b & 2a-2b \\ -c+d & 2c-2d \end{bmatrix}$.

(1) $AB-BA=\begin{bmatrix} -b+2c & -2a+b+2d \\ a-c-d & b-2c \end{bmatrix}=O$ となるのは $a=c+d$ かつ $b=2c$ の場合であるから, $AB \neq BA$ であるための条件は 「$a \neq c+d$ または $b \neq 2c$」であること.

(2) $AB=\begin{bmatrix} -a+2c & -b+2d \\ a-2c & b-2d \end{bmatrix}=O$ を満たす $B \neq O$ の一般形は $B=\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{bmatrix}$ $((c,d) \neq (0,0))$.

(3) $BA=\begin{bmatrix} -a+b & 2a-2b \\ -c+d & 2c-2d \end{bmatrix}=O$ を満たす $B \neq O$ の一般形は $B=\begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix}$ $((a,c) \neq (0,0))$.

【補足】a,b が実数ならば, $ab=ba$ であり, $ab=0$ ならば a,b の少なくとも一方は 0 となる. 上の例は, 行列の積に関してはこれらの事実は必ずしも成立しないことを示している.

6 (1) $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=(ad-bc)E$ となることは容易に分かる.

① $ad-bc \neq 0$ ならば, 上の関係式の両辺を $ad-bc \neq 0$ で割り, $A\left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right)=\left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right)A=E$. よって, $\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}$ が A の逆行列である.

② $ad-bc=0$ ならば $A\widetilde{A}=O$ となるが, このとき A が逆行列 A^{-1} をもつ (= 正則) と仮定すれば, $\widetilde{A}=(A^{-1}A)\widetilde{A}=A^{-1}(A\widetilde{A})=A^{-1}O=O$ となり, $A=O$ が従う (成分に注目). ところが, $A=O$ はどんな 2 次正方行列を掛けても O となるので, A が逆行列をもつという仮定に矛盾する.

(2) ① $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

② $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{23}\begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{23}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{23} \\ \frac{3}{23} \end{bmatrix}$.

7 (1) 具体的な計算により, $A\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}=2\boldsymbol{p}_2$, $A\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{p}_2+2\boldsymbol{p}_3$.

(2) (1) の結果を用いて,

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & A\boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & 2\boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_2+2\boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから, B として $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ がとれる. (実は, P は正則であり, $B=P^{-1}AP$ が成り立つ.)

8 (1) $(x',y')=(x,-y)$ より, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. すなわち, $R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) $x'+iy'=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\sin\theta+y\cos\theta)$ より,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\cos\theta-y\sin\theta \\ x\sin\theta+y\cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad すなわち, \ Q_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(3) ヒントにより, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=Q_\theta\left(R\left(Q_{-\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right)=Q_\theta R Q_{-\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が成り立つ (第 2 の等号は行列の積の結合法則による). よって,

$$\begin{aligned} R_\theta=Q_\theta R Q_{-\theta} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$