数学演習第一（演習 第 3 回） 微積：合成関数の微分法, 逆関数の微分法等

2019 年 5 月 15 日 実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x\log a}$, $(e^x)' = e^x$ より，$f'(x) = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}\log a = a^x \log a$.

(2) 対数の底の変換公式 $\log_a |x| = \dfrac{\log|x|}{\log a}$ と $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ から，$f'(x) = (\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$.

(3) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ と合成関数の微分法により，

$$f'(x) = \frac{(x+2\sqrt{x+2\sqrt{x}})'}{2\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}} = \frac{1+\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}} \quad \left(= \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2\sqrt{x}}\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}} \right).$$

(4) $\log|f(x)| = \dfrac{1}{3}\log(x^2+1) - \log|x-1|$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{-(x^2+2x+3)}{3(x-1)(x^2+1)}.$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x-1}\cdot\frac{-(x^2+2x+3)}{3(x-1)(x^2+1)} = -\frac{x^2+2x+3}{3(x-1)^2(x^2+1)^{2/3}}.$$

(5) まず, $f(x)$ の分子・分母に $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}$ をそれぞれ掛けて，

$$f(x) = \frac{(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2})^2}{(a^2+x^2)-(a^2-x^2)} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{\sqrt{a^4-x^4}}{x^2}.$$

これを x で微分すると，

$$f'(x) = -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{2x}{\sqrt{a^4-x^4}} - \frac{2\sqrt{a^4-x^4}}{x^3} = -\frac{2a^2}{x^3}\left(1+\frac{a^2}{\sqrt{a^4-x^4}}\right).$$

(6) $\log f(x) = (\cos x)\log(\sin x)$ より，$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (-\sin x)\cdot\log(\sin x) + \cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$. よって，

$$f'(x) = f(x)(\log f(x))' = (\sin x)^{\cos x}\left\{-(\sin x)\log(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right\}$$

(7) まず, $g(x) = x^x$ とおけば，$\log g(x) = x\log x$ より，

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1, \quad g'(x) = x^x(\log x + 1).$$

(あるいは，$g'(x) = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\cdot(x\log x)' = x^x(\log x+1)$ と計算することもできる.) よって，$f(x) = x^{g(x)}$, $\log f(x) = g(x)\log x$ より，

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)\log x + \frac{g(x)}{x} = x^x\left((\log x+1)\log x + \frac{1}{x}\right), \quad f'(x) = x^{x^x+x}\left((\log x+1)\log x+\frac{1}{x}\right).$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \mathrm{Sin}^{-1}\,x$ とおけば，$x = \sin y\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) $y = \mathrm{Cos}^{-1}\,x$ とおけば，$x = \cos y\ (0\le y\le\pi)$, $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-x^2}$ より，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

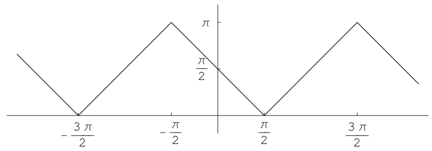
(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1}\,x$ とおけば，$x = \tan y\ \left(-\dfrac{\pi}{2}< y<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1+x^2$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3 (1) $f'(x) = 2\,\mathrm{Sin}^{-1} x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2\,\mathrm{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$. (2) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

(3) $f'(x) = \dfrac{1}{1+(1-x)} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{2(x-2)\sqrt{1-x}}$.

(4) $f'(x) = -\dfrac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\dfrac{\cos x}{|\cos x|} \left(= \begin{cases} -1 & (\cos x > 0) \\ 1 & (\cos x < 0) \end{cases} \right)$.

《注》上の事実と $\mathrm{Cos}^{-1}(\sin n\pi) = \mathrm{Cos}^{-1} 0 = \dfrac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ より, $y = \mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$ のグラフは右の通り.



(5) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = 0$.

《注》$\mathrm{Tan}^{-1}(\pm 1) = \pm\dfrac{\pi}{4}$ であるから上と合わせて, $f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $(x \gtrless 0)$ (複号同順).

4 双曲線関数 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ については微積教科書 p.19 参照. 特に, 次の性質は重要 (三角関数の場合と比較せよ):

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

これらの性質は定義を用いて容易に確認できる.

(1) まず, $\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$ (複号同順) と中間値の定理により, $y = \sinh x$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体. また, $\dfrac{dy}{dx} = \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+y^2}$ である. $\dfrac{dy}{dx} > 0$ と $y = \sinh x$ の全射性により, $y = \sinh x$ の逆関数は $\mathbb{R}$ 全体で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

《別解》 $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ により $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ と具体的な形を求めることもできる. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(2) まず, $\tanh x = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より, $y = \tanh x$ の値域は $-1 < y < 1$ である. また, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - y^2$ である. これにより $\dfrac{dy}{dx} > 0$ であることがわかり, $y = \tanh x$ の逆関数は $-1 < y < 1$ で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{1-y^2}$.

《別解》 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ に注意する. $e^{2x} > 0$ なので, この等式を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するための条件は $-1 < y < 1$ であり, このとき $x = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) \left(= \log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} \right)$ を得る. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\{\log(1+y) - \log(1-y)\} = \frac{1}{1-y^2} \quad (-1 < y < 1).$$