数学演習第一

第 4 回 線形 : 行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数

2019 年 5 月 22 日

$\boxed{1}$ 次の行列が簡約行列ではない理由を簡潔に述べ, 何回かの行基本変形を行って簡約行列に変形せよ.

$$(1)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad (3)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ 下の行列の簡約化について, 空欄を埋めよ (記法は教科書の pp. 39–43 に従うこと).

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ 次の行列を何回かの行基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

$$(1)\ \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \quad (2)\ \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad (3)\ \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 & 16 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \quad (4)\ \begin{bmatrix} 3 & 3 & 15 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ 行列 A に行基本変形を (何回か) 施した結果が B となるとき, $MA = B$ を満たす行列 M が存在する (教科書 pp. 43–46 参照). 以下の「行基本変形 (の繰り返し)」について M に相当する行列を記せ.

[例] 2×2 行列に対して,「第 1 行を 3 倍し, 次に第 2 行を -2 倍する」

[解] 基本行列は 2×2 型, $A \xrightarrow[②\times(-2)]{①\times 3} B$ なので, $B = P_2(-2)P_1(3)A$. 従って, $M = P_2(-2)P_1(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. 但し, $P_1(-2)$ 等は, 基本行列を表す記号 (教科書 p. 43).

(1) 3×2 行列に対して, 「第 1 行に第 2 行の -5 倍を加える」

(2) 3×4 行列に対して, 「第 3 行を 2 倍し, 次に第 1 行と第 3 行を入れ換える」

(3) 4×3 行列に対して, 「第 2 行に第 4 行の 5 倍を加え, 次に第 2 行に第 1 行の 2 倍を加え, 更に第 1 行と第 4 行を入れ換え, 最後に第 3 行に第 2 行の -3 倍を加える」

$\boxed{5}$ 次の行列の階数を求めよ.

$$(1)\ \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \qquad (3)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{bmatrix}$$

【注】用語を線形教科書に合わせるために文言の一部を変更しました.