第 4 回 線形 : 行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数

2019 年 5 月 22 日

$\boxed{1}$ (1) 第 2 行の主成分が第 1 行の主成分より左にある. 第 1 行と第 2 行を交換して, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 第 1 行と第 2 行の主成分が 1 でない. 第 1 行と第 2 行をそれぞれ $\frac{1}{2}$ 倍して, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$.

(3) 第 2 行は零ベクトルであるが, 第 3 行は非零ベクトルであり、零ベクトルが下に集まっていない. さらに, 第 3 行の主成分が第 2 列にあるが, 第 2 列には他にも 0 でない成分がある. 第 1 行に第 3 行の 2 倍を加え, 第 2 行と第 3 行を入れ替えて, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) 第 2 行, 第 3 行の主成分がそれぞれ第 3 列, 第 2 列にあるが, 第 3 列, 第 2 列には他にも 0 でない成分がある. また, 第 3 行の主成分が第 2 行の主成分より左にある. 第 1 行を $\frac{1}{2}$ 倍し, 第 2 行を $\frac{1}{5}$ 倍した後, 第 1 行に第 2 行の 3 倍と, 第 3 行の -2 を加え, 第 2 行と第 3 行を入れ替えて, 簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-7\times\text{①}]{\text{②}-4\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{6}\times\text{③}]{-\frac{1}{3}\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{②}]{\text{①}-2\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$ 簡約行列の主成分を枠で囲んで示しておく. 簡約行列の主成分の個数がもとの行列の階数である. スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る.

(1)
$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times\text{②}} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\leftrightarrow\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}-3\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}+2\times\text{②}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \end{bmatrix}.$$

階数は 2.

(2)
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-2\times\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

階数は 2.

(3)
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 & 16 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1\times\text{①}} \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 & -3 & -16 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}+\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-5\times\text{①}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & 1 & -13 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{③}-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & 1 & -13 & 36 \\ 0 & -10 & 0 & 10 & -40 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}\times\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & 1 & -13 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}\leftrightarrow\text{③}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 1 & -13 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-11\times\text{②}]{\text{①}+2\times\text{②}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -8 \end{bmatrix}.$$

階数は 3.

(4)
$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 15 & 1 \\ 5 & 2 & 16 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 20 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}-2\times\text{③} \\ \text{④}-3\times\text{③}}]{\text{①}-\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{③}-2\times\text{①} \\ \text{④}-\text{①}}]{\text{②}-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{③}+3\times\text{②} \\ \text{④}+3\times\text{②}}]{\text{①}-2\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}\times\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}-\text{③} \\ \text{④}+\text{③}}]{\text{①}+3\times\text{③}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

階数は 3.

$\boxed{4}$ (1) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{①+(-5)\times②} B$ なので, $B=P_{12}(-5)A$. 従って, $M=P_{12}(-5)=\begin{bmatrix}1&-5&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(2) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{2\times③} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow③} B$ なので, $B=P_{13}P_3(2)A$. 従って,

$$M=P_{13}P_3(2)=P_{13}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

積を「計算」する必要はなく, P_{13} に対応する行基本変形を施せばよいことに注意.

(3) 基本行列は 4×4 行列. $A \xrightarrow{②+5\times④} \bullet \xrightarrow{②+2\times①} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow④} \bullet \xrightarrow{③+(-3)\times②} B$ なので,
$B=P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5)A$. 従って,

$$M=P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5)=P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=P_{32}(-3)P_{14}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=P_{32}(-3)\begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&1&0&5\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\2&1&0&5\\-6&-3&1&-15\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ 階数が判った時点で計算を終了してもよい (簡約行列まで求める必要はない).

(1) $\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[③-a\times①]{②-①} \begin{bmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{bmatrix}$.

- $a=1$ のとき, $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, 階数は 1 である.
- $a\neq1$ のとき, $\begin{bmatrix}1&1&a\\0&a-1&1-a\\0&1-a&1-a^2\end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{1-a}\times③]{\frac{1}{a-1}\times②} \begin{bmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\0&1&a+1\end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix}1&1&a\\0&1&-1\\0&0&a+2\end{bmatrix}$ より, $a=-2$ ならば階数は 2 であり, $a\neq-2$ ならば階数は 3 である.

以上より,

$$\begin{cases} a=1 & \Rightarrow \quad \text{階数は } 1, \\ a=-2 & \Rightarrow \quad \text{階数は } 2, \\ a\neq1 \text{ かつ } a\neq-2 & \Rightarrow \quad \text{階数は } 3. \end{cases}$$

(2) $\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix} \xrightarrow[③-a^2\times①]{②-a\times①} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&(b-a)(b+a)&(c-a)(c+a)\end{bmatrix}$.

- $a=b$ のとき, $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&c-a\\0&0&(c-a)(c+a)\end{bmatrix}$. 従って, $c=a$ ならば $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, 階数は 1 である.
  一方, $c\neq a$ ならば $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&c-a\\0&0&(c-a)(c+a)\end{bmatrix} \xrightarrow{③-(c+a)\times②} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&c-a\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, 階数は 2 である.
- $a\neq b$ のとき, $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&(b-a)(b+a)&(c-a)(c+a)\end{bmatrix} \xrightarrow{③-(b+a)\times②} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&0&(c-a)(c-b)\end{bmatrix}$ より, $b=c$ または $c=a$ ならば階数は 2 であり, $b\neq c$ かつ $c\neq a$ ならば階数は 3 である.

以上より, a, b, c が全て一致するならば階数は 1, いずれか二つが一致し, もう一つが異なるならば階数は 2, 全て異なれば階数は 3 となる.

(3) $\begin{bmatrix}0&1&a\\-1&0&b\\-a&-b&0\end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix}-1&0&b\\0&1&a\\-a&-b&0\end{bmatrix} \xrightarrow{③-a\times①} \begin{bmatrix}-1&0&b\\0&1&a\\0&-b&-ab\end{bmatrix} \xrightarrow[③+b\times②]{(-1)\times①} \begin{bmatrix}1&0&-b\\0&1&a\\0&0&0\end{bmatrix}$ より,
(a, b の値によらず) 階数は 2 である.