

数学演習第一 (第5回)

微積：極値, 関数の増減, ロピタルの定理

2019年5月29日実施

1 次の関数の増減を調べ, 極値を求めよ.

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \qquad (2) f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(2 - x)$$

2 演習書 問題 3.2.2

次の極限値を求めよ. ただし, a, b は正の定数とする.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x-1}{x+1} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\sin x} - 2}{\log(\sin x)}$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)} \qquad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)$$
$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{x - \log x - 1} \qquad (6) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

3 関数 $f(x) = x^p \log x$ (p は正定数) に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ をそれぞれ求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x)$ をそれぞれ求めよ.
- (3) $f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ.
- (4) $f(x)$ の代わりに $g(x) = x^{x^p}$ として, (1)~(3) に答えよ.

4 関数 $g(x) = \frac{x^2}{e^x - x - 1}$ ($x \neq 0$) について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $e^x - x - 1 \geq 0$ (等号は $x = 0$ のとき) が成り立つことを示せ.
- (2) $g(x)$ が \mathbb{R} 上の連続関数となるように $g(0)$ の値を定めよ.
- (3) \mathbb{R} 上の連続関数 $g(x)$ の $x = 0$ での微分可能性を示し, 導関数 $g'(x)$ を求めよ.
- (4) $g(x)$ が \mathbb{R} 上で C^1 級, すなわち $g'(x)$ が連続であることを示せ.