数学演習第一 (第５回) 微積：極値, 関数の増減, ロピタルの定理 [解答例]

2019 年 5 月 29 日 実施

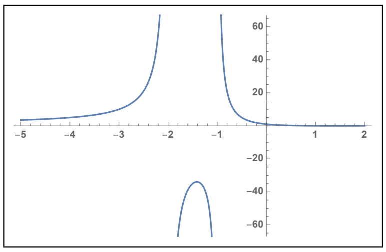
1 (1) $f(x) = 1 - \frac{6x}{x^2+3x+2}$ は $x \neq -2, -1$ で定義された関数であることに注意する．まず, $f(x)$ を微分すると, $f'(x) = -\frac{6(x^2+3x+2)-6x(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{6(x^2-2)}{(x^2+3x+2)^2}$ となる．また, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-1+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-1-0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-2+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-2-0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ であるから $f(x)$ の増減表は以下の通り．よって, 極大値は $f(-\sqrt{2}) = \frac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = -17 - 12\sqrt{2}$, 極小値は $f(\sqrt{2}) = \frac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = -17 + 12\sqrt{2}$ である．

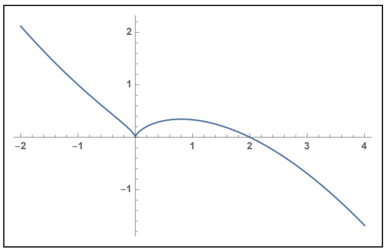
x	$-\infty$	$\cdots$	$-2-0$	$-2+0$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1-0$	$-1+0$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	$+$	∞	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	1

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義されている．$f'(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}}(2-x) - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}x^{-\frac{1}{3}}(4-5x)$ となる．よって, $x < 0$ ならば $f'(x) < 0$, $0 < x < \frac{4}{5}$ ならば $f'(x) > 0$, $\frac{4}{5} < x$ ならば $f'(x) < 0$ である．また, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ である．以上のことから増減表は以下のようになり, 極大値は $f(\frac{4}{5}) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(2 - \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, 極小値は $f(0) = 0$ である．

x	$-\infty$	$\cdots$	-0	0	$+0$	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	$-\infty$		∞	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	∞	$\searrow$	極小値			$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$

【注】上の増減表では $x = \pm\infty, \pm 0$ といった "端点" での状況も調べられているが, 極値を調べるだけなら, "端点" での状況は必要ない．但し, ここまで調べておけば, 関数のグラフをより正確に描くことができる (下図参照).





2 以下, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x-1)-\log(x+1)}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2-1} = -2.$

(2) $\sin x = y$ として, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\sin x}-2}{\log\sin x} = \lim_{y\to 1}\frac{2^y-2}{\log y} \overset{\star}{=} \lim_{y\to 1}\frac{2^y\log 2}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 1} y2^y\log 2 = 2\log 2.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log\sin ax}{\log\sin bx} \overset{\star}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos bx}{\sin bx}} = \lim_{x\to+0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}\frac{\sin bx}{\sin ax} = \lim_{x\to+0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}\frac{\frac{\sin bx}{bx}}{\frac{\sin ax}{ax}}\frac{b}{a} = 1.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}x}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1.$

(5) $y = x^x$ の微分: $\log y = x\log x$ より $\frac{y'}{y} = \log x + 1$, 従って $y' = x^x(\log x + 1)$．これを用いて,
$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{x - \log x - 1} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log x+1)-1}{1-\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log x+1)^2 + x^{x-1}}{\frac{1}{x^2}} = 2.$

(6) $\displaystyle f(x) = \log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} = \frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x}$ とおく．このとき, $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to+0}\frac{a^x\log a + b^x\log b}{a^x+b^x} = \frac{\log a + \log b}{2} = \log(ab)^{\frac{1}{2}}$ となる．従って, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} e^{f(x)} = (ab)^{\frac{1}{2}}$ となる．

3 以下, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) $p>0$ より, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p\log x=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^p\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^p}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{p}{x^{p+1}}}=\lim_{x\to+0}\frac{-x^p}{p}=0.$

(2) $f'(x)=px^{p-1}\log x+x^{p-1}=x^{p-1}(p\log x+1)$ であるから, $p\geq 1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$, $0<p<1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}x^{p-1}(p\log x+1)=\lim_{x\to\infty}\frac{p\log x+1}{x^{1-p}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{p}{x}}{(1-p)x^{-p}}=\lim_{x\to\infty}\frac{p}{(1-p)x^{1-p}}=0$ となる. また, $p>1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^p(p\log x+1)=0$ で, $1\geq p>0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{p-1}(p\log x+1)=-\infty$.

(3) (2) より $f'(x)=x^{p-1}(p\log x+1)=0$ となるのは, $p>1$ のとき $x=0,e^{-\frac{1}{p}}$; $p=1$ のとき $x=e^{-\frac{1}{p}}$; $0<p<1$ のとき $x=e^{-\frac{1}{p}}$ ($x\to\pm\infty$ で $f'(x)\to 0$) である. 増減表は以下のようになる.

$p>1$ のとき

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{p}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	∞
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{pe}$	$\nearrow$	∞

$p=1$ のとき

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{p}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	∞
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{pe}$	$\nearrow$	∞

$0<p<1$ のとき

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{p}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{pe}$	$\nearrow$	∞

(4) $g(x)=x^{x^p}=e^{x^p\log x}=e^{f(x)}$ であるから, (1) の結果と指数関数の連続性より, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$ となる. また, $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$ なので, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}x^{x^p+p-1}(p\log x+1)=\infty$ となり, $p>1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to+0}f'(x)e^{f(x)}=0$, $0<p\leq$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to+0}f'(x)e^{f(x)}=-\infty$ である. 増減表は以下のようになる.

$p>1$ のとき

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{p}}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	∞
$g(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{pe}}$	$\nearrow$	∞

$p=1$ のとき

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{p}}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	∞
$g(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{pe}}$	$\nearrow$	∞

$0<p<1$ のとき

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{p}}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{pe}}$	$\nearrow$	∞

4 以下, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) $f(x)=e^x-x-1$ とおく. $f'(x)=e^x-1$ より, $x>0$ で $f'(x)>0$, $x<0$ で $f'(x)<0$ である. 即ち, $f(x)$ は $x<0$ で単調減少, $x>0$ で単調増加である. 極小値が $f(0)=0$ より, $f(x)\geq 0$ である.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-x-1}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x}=2$ なので, $g(0)=2$ と定めれば良い.

(3) 微分の定義により,

$$\begin{aligned}g'(0)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2(e^h-h-1)}{h(e^h-h-1)}\overset{\star}{=}\lim_{h\to 0}\frac{2h-2e^h+2}{h(e^h-1)+(e^h-h-1)}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{1+h\frac{e^h-1}{e^h-h-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{1+g(h)\frac{e^h-1}{h}}=-\frac{2}{1+g(0)}=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

よって, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能である. $x\neq 0$ において

$$g'(x)=\frac{2x(e^x-x-1)-x^2(e^x-1)}{(e^x-x-1)^2}=-\frac{(x^2-2x)e^x+x^2+2x}{(e^x-x-1)^2}$$

より, 以上をまとめて, $g'(x)=\begin{cases}-\frac{(x^2-2x)e^x+x^2+2x}{(e^x-x-1)^2} & (x\neq 0),\\ -\frac{2}{3} & (x=0).\end{cases}$

(4) $x\neq 0$ においては, $g'(x)$ の分子, 分母は連続で, 分母は 0 にならないので, $g(x)$ は連続である. また, $\displaystyle g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}\overset{\star}{=}\lim_{h\to 0}g'(h)$ より, $g'(x)$ は $x=0$ でも連続である. よって, $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級である.

《注意》上の論法により, 一般に, 連続関数 $\varphi(x)$ が $x=a$ を除いて微分可能であることが分かっているとき, $\displaystyle\lim_{x\to a}\varphi'(x)$ が存在すれば, それが $\varphi'(a)$ となり, $\varphi'(x)$ は $x=a$ で連続となる.