数学演習第一（演習第６回）

線形：連立１次方程式

2019 年 6 月 5 日

$\boxed{1}$ 行列 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ の簡約行列が $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるとき, 次の問いに答えよ.

（1）連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け. (主成分に対応しない変数を任意定数を表すパラメータにとる)

（2）$A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ となる列ベクトル $\boldsymbol{c}$ を 1 つとる．このとき，

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} = \boldsymbol{c} + \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

を示せ．(ここで，部分集合 $V \subseteqq \mathbb{R}^5$ に対し，$\boldsymbol{c} + V := \{\boldsymbol{c} + \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 | \boldsymbol{x} \in V\}$ である.)

このことを用いて，(1) の答えから，同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を答えよ.

$\boxed{2}$ 演習書問題 8.2.9 (1) および 問題 8.2.10 (1), (2), (3) を解け.

$\boxed{3}$ 次の連立 1 次方程式を解け. ((1) は逆行列を用い, (2) は拡大係数行列を簡約化せよ.)

（1）$\begin{cases} 7x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

$\boxed{4}$ 次の同次連立 1 次方程式を解け. 更に, **基本解**と**解の自由度**を求めよ.

（1）$\begin{cases} -x + 5y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

$\boxed{5}$ 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ x + 4y + az = 1 \\ 3x + 12y + a^2 z = a \end{cases}$ について以下の問いに答えよ.

（1）係数行列と拡大係数行列の階数を調べよ. (a の値によって場合分けせよ.)

（2）(1) の場合分けに対応して, 解の個数 (ただ 1 つ, 無数, なし) を調べよ.

（3）解を「3 平面の共有点の集合」と見て, 図形的な言葉 (点, 直線, 空集合) で解を表現せよ.

$\boxed{6}$ ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は定数) について次の問いに答えよ.

（1）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が**1 次独立** (すなわち $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$) となるような k の条件を求めよ.

（2）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が**1 次従属** (すなわち $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ を満たす $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ が存在) となるような k の条件を求めよ. また, そのとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の**非自明な 1 次関係式** $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ $((c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0))$ を 1 つ挙げよ.

[ヒント] c_1, c_2, c_3, c_4 を未知数とする同次連立 1 次方程式を考えよ.