数学演習第一 (演習 第 6 回)　線形：連立 1 次方程式 ［解答例］　2019 年 6 月 5 日 実施

1 (1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $\begin{cases} x_1 \quad\ + 3x_3 \quad + \qquad x_5 = -3 \\ \quad x_2 - 2x_3 \quad - \qquad x_5 = \ \ 2 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + (2/3)x_5 = \ \ 1 \end{cases}$ と簡約化されるので, 主成分に関係しない変数を $x_3=s$, $x_5=t$ (s,t は任意定数) とおいて, この式に代入し，s, t のある項は移項して（$x_3=s$, $x_5=t$ も併せて）書くと，解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-3s-t \\ 2+2s+t \\ s \\ 1-(2/3)t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

[注] 解の表示に分数が現れないように $x_5=3t$ とおいてもよい ((2) の解答例ではそのようにした).

(2) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{x}_0$ ($\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^5$) とおく．このとき，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow A(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow A\boldsymbol{c}+A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{b}+A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$.
故に，$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5 | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}=\boldsymbol{c}+\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5 | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ である．(1) の結果から，$\boldsymbol{c}$ として $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ がとることができ，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

であることがわかる．

[注] ここで, 任意定数が 2 つあるので，**解の自由度**は 2 である．また，この方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の<u>任意の解</u>は，解 $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ の<u>1 次結合で一意的に表されている</u>ので, この 2 つの解を この方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の**基本解**と呼ぶ．(線形教科書 p. 56 参照).

2 拡大係数行列を行基本変形の繰り返し (掃き出し法) により簡約行列まで変形して, 連立 1 次方程式の解を求める.

8.2.9 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 21 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}$
$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. よって, $x=3$, $y=7$, $z=-3$.

8.2.10 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
主成分に対応しない変数 x_3 を任意定数 t として, 解は $x_1=35+8t,\ x_2=-22-5t,\ x_3=t.$

8.2.10 (2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
主成分に対応しない変数 x_2, x_3 をそれぞれ s, t として, 解は $x_1=3+2s+3t,\ x_2=s,\ x_3=t.$

8.2.10 (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$.
よって, (係数行列の階数) $\neq$ (拡大係数行列の階数) なので, 解なし.

3 (1) 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と書ける．よって,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

解法の指定がなければ，勿論, 拡大係数行列を簡約化して解いてもよい.

(2) 拡大係数行列を簡約化して,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 2 & 10 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程式は $\begin{cases} x_1 \quad -2x_3 = -4 \\ x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，求める解は $x_3 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+2t \\ 3-5t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

4 係数行列を簡約化して解を求める．

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，方程式は $\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，解は $z = t$ とおいて $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t は任意定数)．よって，基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ で解の自由度は 1.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，方程式は

$\begin{cases} x_1 \quad + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，解は $x_3 = 2s,\ x_4 = t$ とおいて $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s-t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(s, t は任意定数)．よって，基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で，解の自由度は 2.

5 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 3 & 12 & a^2 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 3 & a^2+3 & a+3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-3) & a-3 \end{bmatrix}$.

- $a = 0$ のとき，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ となり，係数行列の階数は 2，拡大係数行列の階数は 3.
- $a = 3$ のとき，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり，係数行列，拡大係数行列ともに階数は 2.
- $a \neq 0, 3$ のとき，係数行列，拡大係数行列ともに階数は 3.

[注] 階数を求めるだけなら上の形まで変形すれば充分．(勿論，簡約行列まで求めてもよい．)

(2)
- $a = 0$ のとき，$2 =$ (係数行列の階数) $<$ (拡大係数行列の階数) $= 3$ なので解なし．
- $a = 3$ のとき，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，解は無数にあり，その解は $x = -7 + 13t$, $y = 2 - 4t,\ z = t$ (t は任意定数)．
- $a \neq 0, 3$ のとき，

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a(a-3) & a-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/a-4 \\ 0 & 1 & 0 & 1-1/a \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{bmatrix}$$

であるから，解はただ 1 つで，$x = \dfrac{4}{a} - 4,\ y = 1 - \dfrac{1}{a},\ z = \dfrac{1}{a}$.

(3)
- $a = 0$ のとき，解は空集合．　• $a = 3$ のとき，解は直線 $\dfrac{x+7}{13} = \dfrac{y-2}{-4} = z$.
- $a \neq 0, 3$ のとき，解は点 $\left(\dfrac{4}{a} - 4, 1 - \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a}\right)$.

6 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の 1 次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ は c_1, c_2, c_3, c_4 を未知数 (変数) とする同次連立 1 次方程式

$$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

と見なせる．係数行列を簡約化すると，

$$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立とは (*) の解が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ に限られることであるから，求める条件は $k \neq 1$.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次従属とは (*) が自明でない解をもつことであるから，求める条件は $k = 1$. このとき (*) の解は $c_1 = -t, c_2 = t, c_3 = -t, c_4 = t$ (t は任意定数)．特に，$t = -1$ と選び，非自明な 1 次関係式 $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ を得る．