数学演習第一（演習第７回）

微積：高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開

2019 年 6 月 19 日

1 開区間 I で定義された関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ が, I 上で 2 回微分可能かつ $\varphi'(t) \neq 0$ を満たすとする. このとき, y は x の 2 回微分可能な関数 (定義域 $\varphi(I)$) となり, 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ が

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

の形で与えられる ([微積] 定理 2.2.8). 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれに対応する形で求めよ ([微積] 問題 2.3 の 3,4 参照).

2 次の x の関数 y の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ (問題 3.2.5 類題).

(1) $y = e^x$ (2) $y = \sin x$ (3) $y = \cos x$ (4) $y = \dfrac{1}{x}$ (5) $y = \log x$

(2) では $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ を繰り返し用いる. (3) も同様. ([微積] p.40 例 3 参照).

(6) $y = f(ax+b)$ (f は C^∞ 級, a, b は定数で $a \neq 0$) (7) $y = \log(3-2x)$ ((5) と (6) を使う)

(8) $y = \sin^2 x$ ($\cos 2x$ で表し (3) と (6) を使う) (9) $y = \dfrac{1}{1-x-2x^2}$ (部分分数分解して (4) と (6) を使う)

(10) $y = x^2 e^{-2x}$ (Leibniz（ライプニッツ）の公式) (11) $y = e^{-x}\sin x$ (まず y' を三角関数の合成で整理)

(12) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (**2** 重階乗を用いて表せ) 但し, n の **2** 重階乗 $n!!$ は

$$n!! = \begin{cases} 1\cdot 3 \cdots n & (n \text{ 以下の奇数の積}) \quad \text{if } n \geqslant 1 : \text{奇数} \\ 2\cdot 4 \cdots n & (n \text{ 以下の偶数の積}) \quad \text{if } n \geqslant 2 : \text{偶数} \end{cases} \qquad \text{および} \quad (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される. (従って, 例えば $n! = (n-1)!! \cdot n!!$, $(2n)!! = 2^n n!$ $(n \geqslant 0)$ が成り立つ.)

3 次の各関数 $f(x)$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を計算し, 有限 Maclaurin（マクローリン）展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N \quad \underset{\theta \text{ は } x, N \text{ に依存}}{(0 < {}^\exists\theta < 1)}$$

を書け (問題 3.2.7 類題). 更に, $N = 6$ の場合を具体的な数字を使って表せ ($R_6(x)$ の具体形は不要).

(1) $f(x) = e^x$ (2) $f(x) = \sin x$ (3) $f(x) = \cos x$ ((2), (3) については例題 3.8 $\boxed{\text{解説}}$ に倣え)

(4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (5) $f(x) = \log(1+x)$ (6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ ((4) から (6) は $x > -1$ の範囲で考える)

4 関数 x^p, $\dfrac{1}{x^p}$ $(p \in \mathbb{N})$ に対して, $x = 1$ における有限 Taylor（テーラー）展開を N 次 $(N > p)$ の剰余項 $R_N(x)$ まで求めよ.

5 $f(x)$ が 0 を含む開区間 I で C^∞ 級のとき, 任意の自然数 N に対して $f(x)$ は $\boxed{3}$ で述べた形の有限 Maclaurin 展開をもつ. そこに現れる x^n の係数 $a_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ について以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が奇関数 (すなわち $f(-x) = -f(x)$) のとき $a_{2m} = 0$ となることを示せ. また, $f(x)$ が偶関数 (すなわち $f(-x) = f(x)$) のとき $a_{2m+1} = 0$ となることを示せ.

(2) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1} x$ に対して, ① $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ を示せ. ② 前式の両辺を n 回微分して次式を示せ:

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geqslant 0).$$

③ $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ $(m \geqslant 0)$ を示せ. ④ a_{2m+1} $(m \geqslant 0)$ を求めよ. (例題 3.10 参照)

(3) $f(x) = \tan x$ に対して, ① $f'(x) = 1 + f(x)^2$ を確認せよ. ② 前式の両辺を n 回微分して $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(j)}(x)$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ で表せ. ③ $f^{(2m+1)}(0)$ を $f^{(2k+1)}(0)$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ で表せ. ④ a_{2m+1} を a_{2k+1} $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ で表せ. ⑤ a_1, a_3, a_5, a_7 を求めよ.