数学演習第一（演習第７回）【解答例】

微積： 高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開　　2019 年 6 月 19 日

1 導関数の計算まで含めて説明する．まず, 仮定により $t = \varphi^{-1}(x)$ であるから $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける．よって, y を x で微分すれば, 合成関数・逆関数の微分公式を用いて,

$$y' = \{\psi(\varphi^{-1}(x))\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

すなわち $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ が成り立つ．次に, $\omega(t) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば, $y' = \omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから, 上と同じ論法で $y'' = \{\omega(\varphi^{-1}(x))\}' = \dfrac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. ここで, $\omega'(t) = \dfrac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^2}$ より,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\varphi(t)} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3}.$$

これを, 変数の関係 (y は t の関数, t は x の関数 (= [x は t の関数] の逆関数), 合成して y は x の関数) で表現すれば,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

2 (n の範囲がなければ $n \geqslant 0$ で正しいことを意味する.)　(1) $y^{(n)} = e^x$.　(2) $y^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(3) $y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.　(4) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.　(5) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ $(n \geqslant 1)$.

(6) $y' = f'(ax+b) \cdot \{ax+b\}' = af'(ax+b)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

(7) (5) と (6) の結果を使うと, $y^{(n)} = (-2)^n \cdot \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(3-2x)^n} = -\dfrac{2^n(n-1)!}{(3-2x)^n}$ $(n \geqslant 1)$.

(8) (3) と (6) の結果を使うと, $y^{(n)} = \left\{\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\right\}^{(n)} = -\dfrac{1}{2}\{\cos 2x\}^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n \geqslant 1)$.

(9) $y = \dfrac{1}{(1+x)(1-2x)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1-2x}\right)$ と部分分数分解し, (4) と (6) の結果を用いて,

$$y^{(n)} = \left\{\frac{1}{1-x-2x^2}\right\}^{(n)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{2\cdot(-2)^n\cdot(-1)^n n!}{(1-2x)^{n+1}}\right\} = \frac{n!}{3}\left\{\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}}\right\}.$$

(10) $y = x^2e^{-2x}$ より, $y' = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = -2(x^2-x)e^{-2x}$. $n \geqslant 2$ のときは Leibniz（ライプニッツ）の公式を用いて,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{x^2\}^{(k)}\{e^{-2x}\}^{(n-k)} = x^2\{e^{-2x}\}^{(n)} + n\cdot 2x\{e^{-2x}\}^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\{e^{-2x}\}^{(n-2)} \\ &= \{(-2)^n x^2 + 2n(-2)^{n-1}x + n(n-1)(-2)^{n-2}\}e^{-2x} = \underbrace{(-2)^n\left\{x^2 - nx + \tfrac{1}{4}n(n-1)\right\}e^{-2x}}_{\text{この式は } n=0,1 \text{ でも正しい}}. \end{aligned}$$

(11) $y = e^{-x}\sin x$ より, $y' = e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) \left(= -\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^{-x}\sin\left(x + \dfrac{3n\pi}{4}\right) \left(= (-\sqrt{2})^n e^{-x}\sin\left(x - \dfrac{n\pi}{4}\right)\right)$.

Leibniz の公式を用いた表現も可能: $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{-x}\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$.

(12) $y^{(n)} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\dfrac{1}{2}-(n-1)\right)x^{-\frac{1}{2}-n} = (-1)^n\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{2n-1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}-n} = \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n x^n\sqrt{x}}$.

3 以下, 明示はしないが, 剰余項 $R_N(x)$ の表現式の中の θ は $0 < \theta < 1$ を満たす適当な数 (x, N に依存) を表す.

(1) $f(x) = e^x$ より, $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ $(n \geqslant 0)$. よって, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\frac{x^n}{n!} + R_N(x)$, $R_N(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{N!}x^N$.

$N = 6$ なら, $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_6(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + R_6(x)$.

(2) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, $f^{(n)}(0) = \sin\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-1)^m & (n = 2m+1) \end{cases}$ $(n \geqslant 0)$ より,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{\sin(\theta x + \frac{N\pi}{2})}{N!}x^N. \quad \text{(例題 3.8 解説参照)}$$

ここで, 和をとる m の範囲は $2m+1 \leqslant N-1$ から決まる: $0 \leqslant m \leqslant N/2 - 1$. m は整数なので, $0 \leqslant m \leqslant \lfloor N/2 \rfloor - 1$. 但し, $\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大整数を表す (高校教科書では $[a]$ を用いた). なお, a 以上の最小整数は $\lceil a \rceil$ で表す.

$N = 6$ なら, $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_6(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + R_6(x)$.

(3) $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, $f^{(n)}(0) = \cos\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & (n = 2m) \\ 0 & (n = 2m+1) \end{cases}$ $(n \geqslant 0)$ より,

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{\cos(\theta x + \frac{N\pi}{2})}{N!}\, x^N.$$

$N = 6$ なら，$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + R_6(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + R_6(x)$.

(4) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ $(n \geqslant 0)$ より，$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ $(n \geqslant 0)$. よって, $x > -1$ に対して,

$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \dfrac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}}$. (実は, 等比数列の和の公式から $R_N(x) = \dfrac{(-x)^N}{1+x}$).

$N = 6$ なら，$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + R_6(x)$.

(5) $f(x) = \log(1+x)$ より，$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n \geqslant 1)$. 故に，$f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n \geqslant 1)$. よって, $x > -1$ に対して，$\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \dfrac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N}\, x^N$.

$N = 6$ なら，$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + R_6(x)$.

(6) $\boxed{2}$ (11) の結果から, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$, $f^{(n)}(0) = \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $(n \geqslant 0)$.

よって, $x > -1$ に対して，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \dfrac{(2N-1)!!}{(2N)!!} \dfrac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+\frac{1}{2}}}$.

$N = 6$ なら，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{16}x^3 + \dfrac{35}{128}x^4 - \dfrac{63}{256}x^5 + R_6(x)$.

【注】剰余項 $R_N(x)$ を評価して，(1) から (6) の関数は無限級数に表示できることが分かる ((4) から (6) は範囲が制限される).

(1) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$，(2) $\sin x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$，(3) $\cos x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$，(4) $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ $(|x| < 1)$,

(5) $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$, (6) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$.

$\boxed{4}$ (1) $x^p = \{1 + (x-1)\}^p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (x-1)^n$. $(R_N(x) = 0)$

(2) $\{x^{-p}\}^{(n)} = (-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)x^{-p-n} = (-1)^n p(p+1)\cdots(p+n-1)x^{-p-n} = (-1)^n \dfrac{(n+p-1)!}{(p-1)!} \dfrac{1}{x^{p+n}}$

より，$\dfrac{1}{x^p} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} (x-1)^n + R_N(x)$. $R_N(x) = \dbinom{N+p-1}{N} \dfrac{(-1)^N (x-1)^N}{\{1+\theta(x-1)\}^{N+p}}$ $(0 < \theta < 1)$.

$\boxed{5}$ (1) 最初に $\dfrac{d^n}{dx^n} f(-x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ に注意する.

- $f(x)$ が奇関数のとき: $f(-x) = -f(x)$ の両辺を $2m$ 回微分して, $f^{(2m)}(-x) = -f^{(2m)}(x)$. これより $f^{(2m)}(0) = -f^{(2m)}(0)$, すなわち $f^{(2m)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m} = \dfrac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} = 0$.
- $f(x)$ が偶関数のとき: $f(-x) = f(x)$ の両辺を $2m+1$ 回微分して, $-f^{(2m+1)}(-x) = f^{(2m+1)}(x)$. これより $-f^{(2m+1)}(0) = f^{(2m+1)}(0)$, すなわち $f^{(2m+1)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m+1} = \dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = 0$.

(2) ① 容易なので略. ② 1 回微分して整理すると $(1-x^2)f'''(x) - 3xf''(x) - f'(x) = 0$. n 回 $(n \geqslant 2)$ 微分すると Leibniz の公式により $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + n\cdot(-2x)f^{(n+1)}(x) + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)$. これを整理して, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$. よって, すべての $n \geqslant 0$ に対して関係式が示された ($n = 0$ のときは明らか). ③ $n = 2m-1$ $(m \geqslant 1)$ の場合の②の関係式に $x = 0$ を代入して, $f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2 f^{(2m-1)}(0)$. この関係式を繰り返し用いて, $f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2 f^{(2m-1)}(0) = \cdots = (2m-1)^2 \cdots 3^2 \cdot 1^2 f'(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ $(m \geqslant 1)$. ここで, $f'(0) = 1$ を用いた. $(-1)!! = 1$ に注意すれば, $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ $(m \geqslant 0)$. ④ $a_{2m+1} = \dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \dfrac{\{(2m-1)!!\}^2}{(2m)!! \cdot (2m+1)!!} = \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \dfrac{1}{2m+1}$.

(3) ① $f(x) = \tan x$ より, $f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + f(x)^2$. ② $n \geqslant 1$ のとき $f'(x) = 1 + f(x)^2$ を n 回微分すると Leibniz の公式により $f^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) f^{(j)}(x)$. $n = 0$ のときは $f'(x) = 1 + f(x)^2$.

③ $f^{(2k)}(0) = 0$ より, $f^{(2m+1)}(0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} f^{(2m-j)}(0) f^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} f^{(2m-2k-1)}(0) f^{(2k+1)}(0)$ $(m \geqslant 1)$. ④ $a_{2m+1} = \dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \dfrac{(2m)!}{(2m+1)!} \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2m-2k-1)}(0) f^{(2k+1)}(0)}{(2m-2k-1)!(2k+1)!} = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} a_{2m-2k-1} a_{2k+1}$ $(m \geqslant 1)$. ⑤ $a_1 = f'(0) = 1$ と④の関係式を用いて, $a_1 = 1$, $a_3 = \dfrac{1}{3} a_1^2 = \dfrac{1}{3}$, $a_5 = \dfrac{1}{5}(a_3 a_1 + a_1 a_3) = \dfrac{2}{15}$, $a_7 = \dfrac{1}{7}(a_5 a_1 + a_3^2 + a_1 a_5) = \dfrac{17}{315}$.