数学演習第一（演習第８回）

線形： 正則行列, 逆行列, 2 次または 3 次の行列式

2019 年 6 月 26 日

1 次の問いに答えよ.

(1) 逆行列, 正則行列の定義を確認し (線形教科書 pp. 25–26 参照), その定義に即して, 「n 次正方行列 A, B が正則行列ならば, 積 AB も正則行列であり, その逆行列 $(AB)^{-1}$ が $B^{-1}A^{-1}$ で与えられる」ことを示せ.

(2) 2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は $\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0}$ であり, 逆行列は

$A^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}}$ で与えられる (演習第 2 回 $\boxed{6}$ 参照). この事実を用いて,

① $\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ $(r \neq 0)$ の逆行列を求めよ.　② $\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}^{\text{正則と仮定}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を解け.

2 n 次正方行列 A および n 次単位行列 $E = E_n$ に対して, $\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}$ の (行基本変形による) 簡約行列が $\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}$ の形になるなら, A は正則で $B = A^{-1}$ である. そうでない (すなわち左側が E にならない) なら, A は正則ではない ($\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}$ の簡約行列の左半分が A 自身の簡約行列になっていることに注意). この事実を用いて, 演習書問題 8.3.4 (1), (2), (3), (5) に答えよ.

3 m 次正方行列 A, $m \times n$ 行列 B に対して, $m \times (m+n)$ 行列 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ に行基本変形を繰り返して $\begin{bmatrix} E & C \end{bmatrix}$ まで変形できたならば, A は正則行列であり, $C = A^{-1}B$ が成り立つ. この理由を説明せよ. また, この事実を用いて, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して, 行列方程式 $AX = B$ および $YA = B$ (転置を考えよ) を解け.

4 $P = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ について次に答えよ.

(1) ${}^{t}QQ = E$ となること (このような Q を直交行列と呼ぶ) を示し, Q^{-1} を求めよ. (線形教科書 p.59 系 9.2 に注意)

(2) $P = QD$ を満たす対角行列 D を求め, これを利用して $r\sin\theta \neq 0$ のとき, P^{-1} を求めよ.

A 次の行列式を, 線形教科書 p. 66 例 10.2 に示されている公式を用いて計算せよ. なお, (2), (5) については因数分解された形で答えよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} \lambda^2+1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ c & b & \lambda+a \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & -1 \\ -2 & 4 & \lambda \end{vmatrix}$

B 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ および空間ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 次の面積, 体積を計算せよ. (線形教科書 pp.85–86「行列式の幾何学的意味」参照)

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形および三角形の面積.　(2) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の作る平行六面体および四面体の体積.

C $\boxed{1}$ (2) ② の解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ の各成分は分数の形で与えられるが, それらの分母, 分子はどれも $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に関係した 2 次正方行列の行列式の形に書けていることを確かめよ.