数学演習第一（演習第８回）　【解答例】

微積： 正則行列, 逆行列, 2 次または 3 次の行列式　　2019 年 6 月 26 日

1

(1) 正方行列 A に対して, $AB = BA = E$ (E は単位行列) を満たす行列 B が存在するとき, B を A の逆行列と呼び A^{-1} で表す (逆行列は一意に定まる). また, 逆行列をもつ行列を正則行列と呼ぶ. ／ n 次正方行列 A, B が正則ならば, A, B はそれぞれの逆行列 A^{-1}, B^{-1} をもち, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$. よって, $B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列となり, AB が正則であることが分かる. (線形教科書 p. 59 系 2 を認めれば, 上の計算は一方だけで十分.)

(2) ① $\cos\theta\cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r \neq 0$ より, $\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$ は逆行列をもち, $\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{r}\begin{bmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}$ で与えられる.

② $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\ \frac{-a_{21}b_1+a_{11}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{bmatrix}$.

2

以下では, 行基本変形が何回か行われていることを $\dashrightarrow$ で表した. ($\boxed{P_i(c)}$, $\boxed{P_{ij}}$, $\boxed{P_{i_1 j}(c_1)\cdots P_{i_k j}(c_k)}$ のいずれか 1 つにより得られる行基本変形を $\to$ で表すことが多いが, これらのいくつかの組み合わせを $\to$ で表すこともある. 紛らわしいので, ここでは記号 $\dashrightarrow$ を導入して区別した.)

(1) $\left[\begin{array}{cc|cc}2&4&1&0\\3&5&0&1\end{array}\right] \to \begin{bmatrix}2&4&1&0\\1&1&-1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&4&1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&2&3&-2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&1&\frac{3}{2}&-1\end{bmatrix}$

$\to \left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{5}{2}&2\\0&1&\frac{3}{2}&-1\end{array}\right]$ より, $\begin{bmatrix}2&4\\3&5\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{5}{2}&2\\ \frac{3}{2}&-1\end{bmatrix}$. ($\boxed{1}$(2) の逆行列の公式を用いた方が計算は速い)

(2) $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&6&1&0&0\\3&6&9&0&1&0\\6&9&11&0&0&1\end{array}\right] \to \begin{bmatrix}1&3&6&1&0&0\\0&-3&-9&-3&1&0\\0&-9&-25&-6&0&1\end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix}1&0&-3&-2&1&0\\0&1&3&1&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-\frac{7}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{7}{2}&\frac{25}{6}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$ より, $\begin{bmatrix}1&3&6\\3&6&9\\6&9&11\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{7}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{7}{2}&\frac{25}{6}&-\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

(3) $\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right] \to \begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&-1&1&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-2&0&-1&0&-1\\0&0&-2&-1&-1&0\end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix} \dashrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right]$ より, $\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$.

(5) $\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&1&1&0&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&1&0&0\\1&0&2&1&0&0&1&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\end{array}\right] \to \begin{bmatrix}1&2&0&1&0&1&0&0\\2&1&1&0&1&0&0&0\\1&0&2&1&0&0&1&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&0&1&0&1&0&0\\0&-3&1&-2&1&-2&0&0\\0&-3&2&0&0&-1&1&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix}1&2&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\\0&-2&2&0&0&-1&1&0\\0&-3&1&-2&1&-2&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\\0&0&4&4&0&-1&1&2\\0&0&4&4&1&-2&0&3\end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&2&0&0&0&1\\0&0&4&4&0&-1&1&2\\0&0&0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]$

より, 逆行列は存在しない.

3

【考え方 1】行基本変形は基本行列を左から掛けることにより実現されるから, $[\,A\ \ B\,]$ を $[\,E\ \ C\,]$ まで変形するのに実行した行基本変形に対応する基本行列の積を P と表せば, $P[\,A\ \ B\,] = [\,E\ \ C\,]$ と書ける. よって $PA = E$, $PB = C$ が成り立つので, 第 1 式から $P = A^{-1}$ (A は正則) が従い, これを第 2 式に代入して $C = A^{-1}B$ が得られる. 【考え方 2】 $[\,A\ \ B\,]$ が $[\,E\ \ C\,]$ まで行基本変形されたとき, A は E まで変形されるので正則. また, $B = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n]$, $C = [\boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n]$ とすれば, $[\,A\ \ \boldsymbol{b}_i\,]$ が $[\,E\ \ \boldsymbol{c}_i\,]$ まで変形されるので $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_j$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_j$ である ($j = 1, \ldots, n$). まとめて考えれば, $AX = B$ の解が $X = C$ となるから, $C = A^{-1}B$ が成り立つ.

(1) $\left[\,A \mid B\,\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

$\dashrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] = \left[\,E \mid A^{-1}B\,\right]. \qquad \therefore\ X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$

(2) $YA = B$ の転置をとって, $YA = B$ と同値な行列方程式 ${}^{t}\!A\,{}^{t}Y = {}^{t}B$ を得る.

$\left[\,{}^{t}\!A \mid {}^{t}B\,\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$

$\dashrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & -3 \end{array}\right] = \left[\,E \mid ({}^{t}\!A)^{-1}\,{}^{t}B\,\right] = \left[\,E \mid {}^{t}(BA^{-1})\,\right]. \quad \therefore\ Y = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 8 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$

【注】列基本変形を用いれば, $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \dashrightarrow \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$ となる (上の計算を転置して実行することに他ならない).

$\boxed{4}$ (1) $A = \left[\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n\right]$ とすれば, ${}^{t}\!AA$ の (i,j) 成分は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$ で与えられる. よって, A が直交行列であることを示すには A の異なる 2 つの列が直交し, かつ各列の長さ (ノルム) が 1 であることを確かめればよい. 行列 Q はこの性質をもっている (計算省略) ので直交行列である. 従って,

$$Q^{-1} = {}^{t}Q = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) まず, P は Q の第 2 列を r 倍, 第 3 列を $r\sin\theta$ 倍して得られるから, 対角行列 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}$ をとれば, $P = QD$ が成り立つ. $r\sin\theta \neq 0$ のとき, $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix}$ であるから, (1) の結果を用いて,

$$\begin{aligned} P^{-1} &= (QD)^{-1} = D^{-1}Q^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{A}}$ (1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3.$ (2) $\begin{vmatrix} \lambda^2+1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & 2 \end{vmatrix} = 2(\lambda^2+1) - (\lambda+1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 4 + 12 + 1 = 29.$ (4) $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ c & b & \lambda+a \end{vmatrix} = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c.$

(5) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda-4 & -1 \\ -2 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)\lambda - 4 - 4 + 4(\lambda-1) + 2\lambda - 2(\lambda-4) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$

$\boxed{\text{B}}$ (1) $\left|\,\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\,\right| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -5$ より, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積は $|-5| = 5$. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る三角形の面積はその半分だから $5 \cdot \dfrac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

(2) $\left|\,\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{q}\ \ \boldsymbol{r}\,\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 11$ より, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の作る平行六面体の体積は $|11| = 11$. $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の作る四面体は (平行六面体と比較して) 底面が三角形 (面積 1/2 倍) の錐 (体積 1/3 倍) となるので, この四面体の体積は $11 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\boxed{1}$ (2) ② の結果より, $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \dfrac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$

(線形教科書 p. 85 定理 12.8 参照)