数学演習第一（演習第９回）

微積：漸近展開, 積分の計算 (1)

2019 年 7 月 3 日

$\boxed{0}$ 【確認問題】 空欄に適当な式を記入しながら, 今回の演習で必要となる予備知識を確認せよ.

ランダウの記号 (微積教科書 p.49 参照)

関数 $h(x)$ が $\boxed{}$ を満たすとき, $h(x) = o(x^n)$ $(x \to 0)$ と表す.

このとき, $x^m h(x) = o(x^{m+n})$ $(x \to 0)$ であることに注意 (微積教科書 p.50 定理 2.4.4 参照).

漸近展開の要点

関数 $f(x)$ の $x = 0$ における N 次の漸近展開を求めることとは,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N + o(x^N) \qquad (x \to 0)$$

となる x の多項式 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N$ を求めることである (このような多項式が存在するなら係数は一意に定まる). $f(x)$ が $x = 0$ の周りで C^N 級であれば, 微積教科書 定理 2.4.5 より $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ だから, (a)〜(d) に挙げる代表的な関数は, $x \to 0$ で次のように漸近展開される.

(a) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N)$

(b) $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \boxed{}\, x^{2n} + o(x^N)$, $\quad \sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \boxed{}\, x^{2n+1} + o(x^N)$

記号 $\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大整数 (例えば, $N_1 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ は $2N_1 \leqslant N$ を満たす最大整数) を表す.

(c) $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N)$

(d) $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^N)$ 　但し, $\dbinom{\alpha}{0} = 1$, $\dbinom{\alpha}{n} = \boxed{}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

特に, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N)$ 　(微積教科書 p.46 問題 2.3 1 (3), p.151 例題 6.2.1 参照)

(a)〜(d) の関数を用いて表現される関数であっても, より複雑な関数 $f(x)$ に対しては, $f^{(n)}(0)$ を直接計算するのは大変になることが多い. しかし, $f^{(n)}(0)$ を直接計算しなくても, (a)〜(d) の漸近展開を組み合わせることで $x = 0$ における漸近展開を求めることができる.

$\boxed{\text{例題}}$ 次の関数の $x = 0$ における 4 次の漸近展開を求めよ: 　(1) $\dfrac{\sin x}{1+x}$, 　(2) $e^{\cos x}$.

［解］ (1) $\dfrac{1}{1+x}$ の 3 次の漸近展開と $\sin x$ の 4 次の漸近展開を用いて ($\sin x$ の漸近展開は 1 次から始まる！),

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{1+x} &= \frac{1}{1+x} \cdot \sin x = \left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\
&= \left(1 - x + x^2 - x^3\right)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4) = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0).
\end{aligned}$$

(2) $\cos x = 1 + \left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$ $(x \to 0)$, $e^{1+X} = e \cdot e^X = e\left(1 + X + \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$ $(X \to 0)$ より,

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\right\} \\
&= e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\right\} + o(x^4) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0).
\end{aligned}$$

1 (漸近展開)

次の関数の $x \to 0$ における漸近展開を指定された次数まで求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^x o(t^n)\,dt = o(x^{n+1})$ $(x \to 0)$ を用いてよい．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (2 次)　(2) 2^x (2 次)　(3) $\cosh x,\ \sinh x$ (5 次)

(4) $\log(3+2x)$ (2 次)　(5) $\dfrac{x}{2-x-x^2}$ (3 次)　(6) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (4 次)

(7) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ (4 次)　(8) $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (5 次)　(9) $e^{-x}\cos x$ (3 次)

(10) $\dfrac{1}{\cos x}$ (4 次)　(11) $\tan x$ (5 次)　(12) $\log(\cos x)$ (6 次)

(13) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x \left(= \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right)$ (5 次)　(14) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x \left(= \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ (5 次)

【注意】(9) から (12) 以外は N 次の漸近展開の形で求められるので, 余力のある人は是非試してもらいたい ((1), (14) では 2 重階乗を用いる)．なお, 偶関数なら $2N$ 次, 奇関数なら $2N+1$ 次の漸近展開の形にするとよい．

2 (漸近展開の応用)

(1) 漸近展開を用いて次の極限値を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}\right)$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cosh x}{x^2 \log\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ の $n \to \infty$ での漸近展開 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ を求めよ．

(ヒント: $x = 1/n$ とおき, $(1+x)^{1/x} = e^{\log(1+x)/x}$ の $x \to 0$ での漸近展開を考えよ.)

3 (高校程度の積分計算の復習)

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$　(ii) $\displaystyle\int x^2 \log x\,dx$

(iii) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx$　(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

(v) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$　(vi) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

(vii) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\,dx$　(viii) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin mx)(\sin nx)\,dx$ (m, n は自然数)

(2) 次の定積分で表された関数の導関数を求めよ．

(i) $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t}$ $(x > 1)$　(ii) $g(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$