

数学演習第一 (演習第9回) 【解答例】

微積: 漸近展開, 積分の計算 (1) 2019年7月3日

0 順に  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^n} = 0$ ,  $\frac{1}{n!}$ ,  $\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ ,  $\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ ,  $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ,  $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ ,  $(-1)^n$ .

1 (本問でランダウの記号  $o(x^n)$  を使うときはいつも,  $x \rightarrow 0$  を省略している.)

(1) (d) ( $\alpha = -\frac{1}{2}$ ) を用いて,  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ .

(2) (a) を用いて,  $2^x = (e^{\log 2})^x = e^{(\log 2)x} = 1 + (\log 2)x + \frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + o(x^2)$ .

(3) (a) より  $e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \pm \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$  (複号同順) であるから,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5), \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

(4) (c) より,  $\log(3+2x) = \log 3 + \log\left(1 + \frac{2x}{3}\right) = \log 3 + \frac{2x}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{3}\right)^2 + o(x^2) = \log 3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + o(x^2)$ .

(5) 部分分数分解した後に (d) ( $\alpha = -1$ ) を用いて,

$$\frac{x}{2-x-x^2} = \frac{x}{(2+x)(1-x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{2+x}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right) \\ = \frac{1}{3}\left\{\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right) - \left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right)\right\} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + o(x^3).$$

【別法】  $\frac{x}{2-x-x^2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^3}{8} + o(x^3)$ .

(6) (b) より,  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$ . よって,  $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} + o(x^4)$ .

(7) 半角の公式と (6) の結果を用いて,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{x^2} = 2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} = 2\left\{\frac{1}{2} - \frac{(2x)^2}{24} + \frac{(2x)^4}{720} + o(x^4)\right\} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4).$$

【別法】  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)$ .

(8) (c) より,  $\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} + o(x^5)$  (複号同順) であるから,

$$\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\{\log(1+x) - \log(1-x)\} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

(9) (a), (b) を用いて,  $e^{-x} \cos x = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ .

(10) (b) より  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$  であるから,  $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$  ( $X \rightarrow 0$ ) を用いて,

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

【別法】  $\frac{1}{\cos x}$  は偶関数であるから  $\frac{1}{\cos x} = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^4)$  と書ける. このとき,  $\frac{1}{\cos x} \cdot \cos x = 1$  であるから,

$$1 = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + o(x^4))\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = a_0 + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24}\right)x^4 + o(x^4).$$

$a_0 = 1, a_2 - \frac{a_0}{2} = a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} = 0$  を解いて,  $a_0 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{5}{24}$  を得る.

(11) (10) の結果と (b) を用いて,

$$\tan x = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

【別法】  $\tan x$  は奇関数であるから  $\tan x = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 + o(x^5)$  と書ける. 後は  $\tan x \cos x = \sin x$  という関係を用いて, (10) の【別法】と同じ議論を行えば  $b_1, b_3, b_5$  の値が定まる.

(12) (b) より  $\cos x = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)$  であるから,  $\log(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$  ( $X \rightarrow 0$ ) を用いて,

$$\log(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 + o(x^6) \\ = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8}\right) + o(x^6) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6).$$

【別法】  $\{\log(\cos x)\}' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$  であるから, (11) の結果を用いて,

$$\log(\cos x) = -\int_0^x \tan t dt = -\int_0^x \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + o(x^5)\right) dt = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6).$$

$$(13) \quad \tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1-t^2+t^4+o(t^4)) dt = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}.$$

$$(14) \quad (1) \text{ の結果を用いて, } \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 - \frac{-t^2}{2} + \frac{3(-t^2)^2}{8} + o(t^4)\right) dt = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}.$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad (i) \quad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \quad (\text{分母 } x^2 \sin^2 x \text{ の漸近展開が } x^4 \text{ の項から始まるから, 分子を } o(x^4) \text{ を用いて表す})$$

$$= \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 - x^2(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2}{x^2(x + o(x))^2}$$

$$= \frac{(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^2(x^2 + o(x^2))} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow \boxed{\frac{2}{3}} \quad (x \rightarrow 0).$$

(ii) 分母  $x^2 \log \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2 \log(1+x^2)$  の漸近展開は  $x^4$  の項から始まるから, 分子を  $o(x^4)$  を用いて表せばよい.

$$\frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cosh x}{x^2 \log \sqrt{1+x^2}} = \frac{(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4)) - (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))}{\frac{1}{2}x^2(x^2 + o(x^2))} = \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow \boxed{\frac{1}{6}} \quad (x \rightarrow 0).$$

$$(2) \quad \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \text{ であるから, } (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \left\{ 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) \right\} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2).$$

故に,  $(1 + \frac{1}{n})^n = \boxed{e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

$\boxed{3}$  (1) (前半の不定積分に対する積分定数は省略する.)

$$(i) \quad e^x = t \text{ とおけば } e^x dx = dt \text{ であるから, } \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{t}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \boxed{e^x - \log(e^x + 1)}.$$

(ii) 部分積分法により,

$$\int x^2 \log x dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} (\log x)' dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9} = \boxed{\frac{x^3}{9} (3 \log x - 1)}.$$

(iii)  $x^2 = t$  とおけば  $x dx = \frac{dt}{2}$  であるから,

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int t e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} (-t e^{-t} + \int e^{-t} dt) = -\frac{1}{2} (t+1) e^{-t} = \boxed{-\frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2}}.$$

(iv)  $\sin x = t$  とおけば  $\cos x dx = dt$  であるから,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \boxed{\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}.$$

(v)  $x = \sin \theta$  とおけば  $dx = \cos \theta d\theta$  であり,  $\frac{x}{\theta} \left\| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$  と対応する. この範囲で,  $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$  であるから,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{\frac{\pi + \sqrt{3}}{4}}.$$

【別法】この定積分はある図形(半円の一部)の面積を表すので, その面積を図形的に計算すれば定積分の値が得られる.

(vi) 部分積分法により  $I := \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = [-e^{-x} \sin x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = [-e^{-x} \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} (-\sin x) dx =$

$$1 + e^{-\pi} - I. \text{ よって, } I = \boxed{\frac{1 + e^{-\pi}}{2}}.$$

$$(vii) \quad \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\pi} \left| \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| dx = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x| dx = \sqrt{2} \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (-\sin x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin x dx \right)$$

$$= \sqrt{2} \left( [\cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^0 + [-\cos x]_0^{\frac{3\pi}{4}} \right) = \sqrt{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \right\} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

【別法】 $|\sin x|$  は周期  $\pi$  の関数であるから,  $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$

(viii)  $I_{m,n} = \int_0^{\pi} (\sin mx)(\sin nx) dx$  とおく ( $m, n$  は自然数). まず,  $m \neq n$  のとき, 三角関数の積和の公式を用いて,

$$I_{m,n} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\} dx = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_0^{\pi} = \boxed{0}.$$

$$m = n \text{ のときは, } I_{n,n} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

(2) (i)  $c > 1$  を定数として,  $F(x) = \int_c^x \frac{dt}{\log t}$  ( $x > 1$ ) とおけば,  $F'(x) = \frac{1}{\log x}$ . よって,  $f(x) = F(x^3) - F(x^2)$  に合成関数の微分法を適用することにより,

$$f'(x) = F'(x^3) \cdot 3x^2 - F'(x^2) \cdot 2x = \frac{1}{\log x^3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{\log x^2} \cdot 2x = \boxed{\frac{x^2 - x}{\log x}}.$$

(ii)  $g(x) = x \int_0^x \sin t dt - \int_0^x t \sin t dt$  であるから,  $g'(x) = 1 \cdot \int_0^x \sin t dt + x \cdot \sin x - x \sin x = [-\cos t]_0^x = \boxed{1 - \cos x}$ .