

数学演習第一 (演習第 10 回)

線形：4 次以上の行列式

2019 年 7 月 10 日

- 1 A を 4 次正方行列とし, $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ を A の行ベクトル分割とする. A の行列式 $|A|$ の値が -2 であるとき, 以下の行列式の値を求めよ.
- (1) 行列式 $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ a \end{vmatrix}$ (2) 行列式 $\begin{vmatrix} a \\ 3b \\ c+a \\ d \end{vmatrix}$ (3) 行列式 $\begin{vmatrix} a \\ 2b-3a \\ a+2b-c \\ 2a-3b+4c+3d \end{vmatrix}$ (4) 行列式 $\det(2A)$ (5) $|^tA|$

- 2 演習書問題 9.3.2(3), 問題 9.3.3 を解け. (教科書 例題 10.7 が基本. 教科書 p.77 にある列基本変形も有効.)
- (1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

- 3 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.
- (1) 行列式 $|A|$ の値を求めよ.
 (2) 余因子行列 \tilde{A} を求めよ.

- 4 n 次正方行列 A の余因子行列を \tilde{A} , E を n 次単位行列とする.
- (1) $|dE|$ (d はスカラー) を d を用いて表せ. (2) $|\tilde{A}|$ を $|A|$ を用いて表せ.
 ((2) のヒント: 恒等式 $A\tilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって, 左辺には教科書定理 11.3, 右辺には (1) を適用.)

- 5 5 つの 4 次の列ベクトル a, b, c, d, e の間には,
- $$|a, b, c, d| = 2, \quad |e, b, c, d| = 4, \quad |a, e, c, d| = -4, \quad |a, b, e, d| = -2, \quad |a, b, c, e| = -6,$$
- という, 4 次の行列式を用いた関係式があるという. スカラー w, x, y, z, t の間には, $wa + xb + yc + zd = te$ という関係式があるとき, w, x, y, z それぞれを t の式で表せ.

- 6 (1) $|P_5| = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 & \cos \theta_3 \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 & \cos \theta_3 \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{vmatrix}$ の値を求めよ. より一般に, $P_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}$ とし, $n \geq 2$ なる自然数に対し, 帰納的に,
- $$P_{n+1} = \begin{bmatrix} P'_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_n \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \mathbf{p}_n \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \mathbf{0} & \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_n & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$
- (ただし, $P_n = \begin{bmatrix} P'_n \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$ (\mathbf{p}_n は P_n の第 n 行), E_{n-1} は $n-1$ 次の単位行列) と定義するとき, $|P_n|$ の値を求めよ.
- (2) 演習書問題 9.3.6 (6) を解け.