数学演習第一 (第 11 回)　微積 : 積分の計算 (2)　解答例

2019 年 7 月 17 日 実施分

1　(1)〜(4) は基本公式として，計算方法とともに結果も覚えておこう．被積分関数は似て非なるものです．

(1) $x = a\tan\theta \left(|\theta| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置く．$\dfrac{1}{x^2+a^2} = \dfrac{\cos^2\theta}{a^2}$，$dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta$ より，$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{a}$.

(2) 被積分関数を部分分数分解して，$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

(3) $\sqrt{x^2+A} = t - x$ と置くと，両辺を 2 乗することで x^2 が消せて，$x = \dfrac{t^2-A}{2t}\left(= \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{A}{t}\right)\right)$ となる．$dx = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{A}{t^2}\right)dt = \dfrac{t^2+A}{2t^2}\,dt$ だから，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \frac{1}{t - \frac{t^2-A}{2t}}\,\frac{t^2+A}{2t^2}\,dt = \int\frac{dt}{t} = \log|t| = \log|x+\sqrt{x^2+A}|$.

(4) $x = a\sin\theta \left(|\theta| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置く．$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{a\cos\theta}$，$dx = a\cos\theta\,d\theta$ より，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int d\theta = \theta = \mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x}{a}$.

(5)〜(8) では「見えない 1」とのペアで部分積分する方法が有効です．

(5) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \int 1\,\sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$．最後の項は (分子の次数) $\geqq$ (分母の次数) なので，次のように割り算する: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+A}} = \dfrac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}} = \sqrt{x^2+A} - \dfrac{A}{\sqrt{x^2+A}}$．元に戻して移項すると，$\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right)$. 最後は (3) から．

(6) (5) と同じ計算手順で，$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{x}{a}\right)$.

(7) $\displaystyle\int\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x - \int x\,(\mathrm{Sin}^{-1}\,x)'\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$．右辺の被積分関数の分子 x が $(1-x^2)'$ の定数倍であることに注意する．$\displaystyle\int\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \sqrt{1-x^2}$.

(8) $\displaystyle\int\mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \int\frac{x}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$.

【補足】一般に，不定積分 $\displaystyle\int f^{-1}(x)\,dx$ は $t = f^{-1}(x)$ ($\Leftrightarrow$ $x = f(t)$) で置換して，$\displaystyle\int f^{-1}(x)\,dx = \int tf'(t)\,dt = tf(t) - \int f(t)\,dt = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$ と計算できる．但し，$F(t)$ は $f(t)$ の不定積分を表す．

2　(1) $\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} = \dfrac{2x-5}{(x-4)(x-1)} = \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{1}{x-1}$ と部分分数分解して，$\displaystyle\int\frac{2x-5}{x^2-5x+4} = \log|(x-1)(x-4)|$.

(2) $\dfrac{1}{x^4-16} = \dfrac{1}{(x^2+4)(x^2-4)} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x^2+4}\right) = \dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right) - \dfrac{1}{x^2+2^2}\right\}$ より，$\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-16} = \frac{1}{32}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \frac{1}{16}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{2}$.

(3) 被積分関数が (分子の次数)$\geqq$(分母の次数) と頭でっかちなので，$\dfrac{x^2+3}{x^2+4} = \dfrac{x^2+4-1}{x^2+4} = 1 - \dfrac{1}{x^2+4}$ と割り算してから積分する．$\displaystyle\int\frac{x^2+8}{x^2+9}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2+3^2}\right)dx = x - \frac{1}{3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{3}$.

(4) やはり，$\dfrac{2x^4+4x^2+6x}{x^2+2} = \dfrac{2x^2(x^2+2)+6x}{x^2+2} = 2x^2 + 3\dfrac{(x^2+2)'}{x^2+2}$ と割り算する．(分子の次数)$+1 =$ (分母の次数) の場合，分母の導関数を分子に作るように変形する (分母が因数分解できるときは部分分数分解する方法もある)．$\displaystyle\int\frac{2x^4+4x^2+6x}{x^2+2}\,dx = \int\left\{2x^2 + 3\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\right\}dx = \frac{2}{3}x^3 + 3\log(x^2+2)$.

(5) 被積分関数の分母を $x^4+4 = x^4+4x^2+4-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ と因数分解すると，$\dfrac{x^2+2}{x^4+4} = \dfrac{x^2+2}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+2x+2} + \dfrac{1}{x^2-2x+2}\right)$ と分解できる．$\displaystyle\int\frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{(x+1)^2+1^2} + \int\frac{dx}{(x-1)^2+1^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tan}^{-1}(x+1) + \mathrm{Tan}^{-1}(x-1)\right)$.

3 置換積分の問題です．積分変数を巧く置きかえることによって，$\boxed{2}$ のような有理関数の積分に帰着されます．

(1) $t=\sqrt{x}$ として置換積分する．$x=t^2$, $dx=2t\,dt$ だから，$\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2t\,dt}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{t+1}\,dt=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(t-\log|t+1|)=2(\sqrt{x}-\log(\sqrt{x}+1))$.

(2) $t=\sqrt{x-3}$ と置くと，$x=t^2+3$ であって $dx=2t\,dt$．よって，$\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x-3}}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2+3)t}=2\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}$.

(3) $\sqrt{4x^2+2x-1}=t-2x$ と置くと，両辺を 2 乗したときに x^2 の項が消えて，$x=\dfrac{t^2+1}{2(2t+1)}$ と表せる．このとき，$dx=\dfrac{t^2+t-1}{(2t+1)^2}\,dt$ となるから，$\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+2x-1}}=\int\frac{2(2t+1)}{t^2+1}\frac{2t+1}{t^2+t-1}\frac{t^2+t-1}{(2t+1)^2}\,dt=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\,\mathrm{Tan}^{-1}t=2\,\mathrm{Tan}^{-1}(2x+\sqrt{4x^2+2x-1}\,)$.

4 (1) $\cos^4x=\cos^2x\,(1-\sin^2x)=\cos^2x-\left(\dfrac{\sin 2x}{2}\right)^2=\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{1-\cos 4x}{8}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x$,

あるいは $\cos^4x=(\cos^2x)^2=\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x$ より，

$\displaystyle\int\cos^4x\,dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$.

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ の置換は基本です．このとき，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ は (計算で確認した後に) 覚えましょう．

$\displaystyle\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)$.

(3) 被積分関数が $\cos^2x$ と $\sin^2x$ (および $\cos x\sin x$, $\tan x$) の式の場合は，$t=\tan x$ の置換が有効です．このとき，$\cos^2x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ と計算できるから，$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2x+4\sin^2x}=\int\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}+\frac{4t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+4t^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}2t=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}(2\tan x)$.

5 (1) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}=\left[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x-1}{2}\right]_1^2=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}-\mathrm{Sin}^{-1}0=\frac{\pi}{6}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{Sin}^{-1}x\,(\mathrm{Sin}^{-1}x)'\,dx=\left[\frac{1}{2}(\mathrm{Sin}^{-1}x)^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{72}$.

(3) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ で，積分区間の対応は次のようになる：

x	$0\to\frac{\pi}{2}$
t	$0\to 1$

よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\sin x}=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+1}=\int_0^1\frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}-\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6 (1) $\displaystyle S=\int_0^1\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx$ だから，$\boxed{1}$(8) より，$\displaystyle S=\left[x\,\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$.

(2) 曲線 $y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x=\mathrm{Sin}^{-1}y$ $(0\leqq y\leqq 1)$ と表されるから，$\displaystyle V=\pi\int_0^1(\mathrm{Sin}^{-1}y)^2\,dy$．ここで，部分積分を用いて，$\displaystyle\int_0^1(\mathrm{Sin}^{-1}y)^2\,dy=\left[\,y\,(\mathrm{Sin}^{-1}y)^2\,\right]_0^1-\int_0^1 y\cdot\frac{2\,\mathrm{Sin}^{-1}y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\frac{\pi^2}{4}+2\int_0^1(\sqrt{1-y^2}\,)'\,\mathrm{Sin}^{-1}y\,dy=\frac{\pi^2}{4}+2\left\{\left[\sqrt{1-y^2}\ \mathrm{Sin}^{-1}y\right]_0^1-\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,(\mathrm{Sin}^{-1}y)'\,dy\right\}=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^1dy=\frac{\pi^2}{4}-2$．よって，$\displaystyle V=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$.

【補足】上の定積分は $x=\mathrm{Sin}^{-1}y$ ($\Leftrightarrow$ $y=\sin x$) で置換すれば $\displaystyle\int_0^1(\mathrm{Sin}^{-1}y)^2\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$ と変形できる．

(3) $\displaystyle\ell=\int_0^{\log 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^{\log 2}\sqrt{1+\sinh^2x}\,dx$ (微積教科書 p.76 も参照)．双曲線関数の公式 $\cosh^2x-\sinh^2x=1$ (各自確かめよ) を使うと，$\displaystyle\ell=\int_0^{\log 2}\cosh x\,dx=[\,\sinh x\,]_0^{\log 2}=\frac{1}{2}\left[\,e^x-e^{-x}\,\right]_0^{\log 2}=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.