数学演習第一・中間統一試験【解説】 (2019 年 6 月 12 日実施)

1

(1) $\tan\dfrac{3\pi}{4} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ より, $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\tan\dfrac{3}{4}\pi\right) = \mathrm{Cos}^{-1}(-1) = \boxed{\pi}$.

(2) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ とおけば, $\tan\alpha = -2 \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$. よって,

$$\sin\bigl(2\,\mathrm{Tan}^{-1}(-2)\bigr) = \sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha = 2\cos^2\alpha\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \boxed{-\frac{4}{5}}.$$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{12}$ より,

$$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\pi}{12}}.$$

2

以下の (4)–(6) においては, 説明の便宜のため, ロピタルの定理を用いた箇所を $\stackrel{\star}{=}$ で表すことにする.

(4) $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ とおけば, $x \to \infty$ のとき, $y \to +0$ であるから,

$$\frac{\log\bigl(\tan^2\frac{1}{x}\bigr)}{\log\bigl(\tan\frac{3}{x}\bigr)} = \frac{\log(\tan^2 y)}{\log(\tan 3y)} = \frac{2\log(\tan y)}{\log(\tan y) + \log\frac{\tan 3y}{\tan y}}$$
$$= \frac{2}{1 + \frac{1}{\log(\tan y)}\log\frac{\tan 3y}{\tan y}} \to \frac{2}{1 + 0\cdot\log 3} = \boxed{2}.$$

最後の部分では, $y \to +0$ のとき,

$$\frac{\tan 3y}{\tan y} = \frac{\sin 3y}{\cos 3y}\frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\cos y}{\cos 3y}\frac{\sin 3y}{3y}\frac{3y}{\sin y} \to 3, \qquad \frac{1}{\log(\tan y)} \to 0$$

であることを用いた. 前者は, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ ($\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ から容易に従う) に基づいて,

$$\frac{\tan 3y}{\tan y} = \frac{\tan 3y}{3y}\frac{3y}{\tan y} \to 3$$

と考えてもよい.

【別法】 $y \to +0$ のとき, $\tan^2 y$, $\tan 3y \to +0$ であるから, $\log(\tan y)$, $\log(\tan 3y) \to -\infty$. よって, ロピタルの定理を用いて,

$$\lim_{y\to+0}\frac{\log(\tan^2 y)}{\log(\tan 3y)} = \lim_{y\to+0}\frac{2\log(\tan y)}{\log(\tan 3y)} \stackrel{\star}{=} 2\lim_{y\to+0}\frac{\frac{1}{\tan y}\frac{1}{\cos^2 y}}{\frac{1}{\tan 3y}\frac{3}{\cos^2 3y}}$$
$$= \frac{2}{3}\lim_{y\to+0}\frac{\tan 3y}{\tan y}\frac{\cos^2 3y}{\cos^2 y} = \frac{2}{3}\cdot 3 = \boxed{2}.$$

(5) 不定形の極限になっていることを確認しながらロピタルの定理を繰り返し用いると,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{x-\sin x} \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3x^2e^{x^3}}{1-\cos x} = \left(\lim_{x\to 0}3e^{x^3}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\right) \stackrel{\star}{=} 3\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x} = \boxed{6}.$$

《注》極限値 $(\neq 0)$ をもつ “因数” があったら, それは切り離し, より単純な形にしてからロピタルの定理を用いるとよい (2 番目の等号).

(6) 対数をとって考える. $\log\left(\dfrac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^{x^{-2}} = \dfrac{\log(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x)}{x^2}$ は偶関数であるから, この関数の

$x \to 0$ での極限は $x \to +0$ での極限に他ならない．よって，

$$\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^{x^{-2}} = \lim_{x\to +0}\frac{\log(\mathrm{Tan}^{-1}x)-\log x}{x^2} \overset{\star}{=} \lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to +0}\frac{\frac{x}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{\mathrm{Tan}^{-1}x}{x}\right)}{2x^2} = \left(\lim_{x\to +0}\frac{x}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\right)\left(\lim_{x\to +0}\frac{x-(1+x^2)\,\mathrm{Tan}^{-1}x}{2x^3(1+x^2)}\right).$$

ここで，

$$\lim_{x\to +0}\frac{x}{\mathrm{Tan}^{-1}x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to +0}\frac{1}{(1+x^2)^{-1}} = 1 \qquad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}x}{x} = 1 \text{ は常識とすべし}\right),$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{x-(1+x^2)\,\mathrm{Tan}^{-1}x}{2x^3(1+x^2)} \overset{\star}{=} \lim_{x\to +0}\frac{-2x\,\mathrm{Tan}^{-1}x}{2(3x^2+5x^4)} = \lim_{x\to +0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}x}{x}\,\frac{-1}{3+5x^2} = -\frac{1}{3}.$$

従って，

$$\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^{x^{-2}} = 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}. \qquad \therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^{x^{-2}} = \boxed{e^{-\frac{1}{3}}}.$$

【別法】$y = \tan x$ とおけば，$x \to 0$ のとき $y \to 0$ であり，$\log\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^{x^{-2}} = \dfrac{\log\left(\frac{y}{\tan y}\right)}{\tan^2 y}$ は y の偶関数であるから，右辺の関数の $y \to +0$ での極限を計算すればよい．よって，

$$\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^{x^{-2}} = \lim_{y\to +0}\frac{\log\left(\frac{y}{\tan y}\right)}{\tan^2 y}$$

$$= \left(\lim_{y\to +0}\cos^2 y\right)\left(\lim_{y\to +0}\frac{\log y-\log(\sin y)+\log(\cos y)}{\sin^2 y}\right)$$

$$\overset{\star}{=} \lim_{y\to +0}\frac{\frac{1}{y}-\frac{\cos y}{\sin y}-\frac{\sin y}{\cos y}}{2\sin y\cos y} = \lim_{y\to +0}\frac{\sin y\cos y - y}{2y\sin^2 y\cos^2 y} = \lim_{y\to +0}\frac{\sin 2y-2y}{y\sin^2 2y}$$

$$\overset{\star}{=} \lim_{y\to +0}\frac{2\cos 2y-2}{\sin^2 2y+4y\sin 2y\cos 2y} = \left(\lim_{y\to +0}\frac{-2}{1+\frac{4y}{\sin 2y}\cos 2y}\right)\left(\lim_{y\to +0}\frac{1-\cos 2y}{\sin^2 2y}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\lim_{y\to +0}\frac{1}{1+\cos 2y} = -\frac{1}{3}.$$

【補足】漸近展開を知っていれば次のように簡単に計算できる．$x \to 0$ のとき，

$$\mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \qquad \left(\text{例えば } \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2) \text{ を積分せよ}\right)$$

であるから，$\log(1+X) = X + o(X)$ $(X \to 0)$ に注意して，

$$\log\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \log\left(1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right) = -\frac{1}{3}x^2 + o(x^2).$$

これより，

$$\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^{x^{-2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}+o(1)\right) = -\frac{1}{3}.$$

3

(7) $y = (\log x)^x$ $(x > 1)$ とおけば，$\log y = x\log(\log x)$．この両辺を x で微分して，

$$\frac{y'}{y} = \log(\log x) + x\cdot\frac{1}{x\log x} = \log(\log x) + \frac{1}{\log x}. \qquad \therefore\ y' = \boxed{(\log x)^x\left\{\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right\}}.$$

(8) $y = \cos(\mathrm{Sin}^{-1}x)$ $(-1 < x < 1)$ の導関数は

$$y' = -\sin(\mathrm{Sin}^{-1}x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

(9) $y = \mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{1-x}\ (0<x<1)$ の導関数は

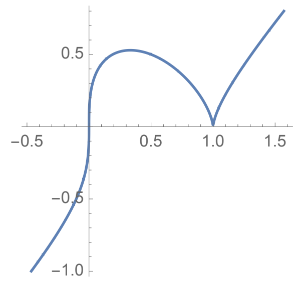
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x}\,)^2}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}.$$

4 (10) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}$ を微分して,

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(3x-1)x^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}.$$

よって, $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



となるので, $f(x)$ は $\boxed{x=\frac{1}{3}\ \text{で極大値}\ \frac{\sqrt[3]{4}}{3}}$ をとり,
$\boxed{x=1\ \text{で極小値}\ 0}$ をとる.

5 (11) $\boldsymbol{a} := \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$ が平面 α の法線ベクトルであるから, $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}}$
が求めるベクトル.

(12) 点と平面との距離の公式を用いて, 求める距離は $\dfrac{|2(-3)-1+2\cdot2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{|-6|}{3} = \boxed{2}$.
【別法】点 $\mathrm{A}(-3,1,2)$ を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線上の点は $(-3+2t, 1-t, 2+2t)$ と書ける. この直線と平面 α との交点 H においては, $2(-3+2t)-(1-t)+2(2+2t)=3$, すなわち $t=2/3$ となるので, H の座標は $(-5/3, 1/3, 10/3)$. 点 H は点 A から平面 α に下ろした垂線の足に他ならないから, 垂線の長さは $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \sqrt{(4/3)^2+(-2/3)^2+(4/3)^2} = \boxed{2}$.

6 (13) $A\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix}3&-5&1\\0&-1&1\\1&-8&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix} = 2\boldsymbol{p}$ より, $\lambda = \boxed{2}$.

(14) $s\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}$ より, s, t は連立 1 次方程式 $P\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix} = A\boldsymbol{q}$ の解である.
$A\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix}3&-5&1\\0&-1&1\\1&-8&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ であるから, $\begin{bmatrix}P & A\boldsymbol{q}\end{bmatrix}$ は

$$\begin{bmatrix}P & A\boldsymbol{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\3&2&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&1&1\\0&-1&-2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

と簡約化できる. よって, $\boxed{s=-1,\ t=2}$.

(15) 上の結果を用いて, $AP = \begin{bmatrix}A\boldsymbol{p} & A\boldsymbol{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\boldsymbol{p} & -\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\0&2\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}2&-1\\0&2\end{bmatrix}$.
これより, $B = \boxed{\begin{bmatrix}2&-1\\0&2\end{bmatrix}}$.

$\boxed{7}$ (16) (行列式) $= (a-1) - a = -1 \neq 0$ より, この行列は正則. その逆行列は

$$\begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -a & a-1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ a & 1-a \end{bmatrix}}.$$

$\boxed{8}$ (17) 係数行列が正方行列であるから, それが正則であることが連立 1 次方程式が唯 1 つの解をもつための必要十分条件である. ここで, 係数行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 3 & a-3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & a-3 \end{vmatrix} = a+1.$$

よって, 求める条件は $\boxed{a \neq -1}$.

(18) $a = 1$ のとき，拡大係数行列を簡約化して,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これにより, 問題の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x \quad + z = -1 \\ \quad y - z = 2 \end{cases}$ に変形される (同値な連立 1 次方程式). このとき, $z = s$ (z は主成分に対応しない変数) とおくことにより, 求める解は

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 - s \\ y = 2 + s \\ z = s \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (s \text{ は任意定数}).$$

(19) 係数行列を行基本変形して,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 6 & -12 & 9 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 7 \\ -3 & 6 & -3 & 3 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -39 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 33 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \to \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

(20) (19) の変形により, 問題の同次連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad - 2x_4 \quad = 0 \\ \qquad x_3 + \ x_4 \quad = 0 \\ \qquad\qquad x_5 = 0 \end{cases}$ と書きかえられる (同値な連立 1 次方程式). ここで, $x_2 = s$, $x_4 = t$ (x_2, x_4 は主成分に対応しない変数) とおいて, 求める解は

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 2s + 2t \\ x_2 = s \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \\ x_5 = 0 \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$