数学演習第一・期末統一試験【解説】 (2019 年 7 月 24 日実施)

1 (1) $f^{(n)}(x) = \boxed{\dfrac{2^n(-1)^n n!}{(2x-3)^{n+1}}} = \boxed{\dfrac{(-2)^n n!}{(2x-3)^{n+1}}}$ (n は非負整数).

(2) $f(x) = x^2e^{3x}$ より, $f'(x) = (3x^2+2x)e^{3x}$. $n \geqslant 2$ のときは, ライプニッツの公式を用いて,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^{3x})^{(n-k)} \\ &= x^2(e^{3x})^{(n)} + n(x^2)'(e^{3x})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}(x^2)''(e^{3x})^{(n-2)} \\ &= \{3^n x^2 + 3^{n-1}2nx + 3^{n-2}n(n-1)\}e^{3x} = \boxed{3^{n-2}\{9x^2+6nx+n(n-1)\}e^{3x}}. \end{aligned}$$

枠内の式は $n = 0, 1$ の場合にも正しいので, すべての非負整数 n に対して成り立つ.

2 次の (3)–(6) では $x \to 0$ における漸近展開を考えている.

(3)
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+2x}} &= (1+2x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}2x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(2x)^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}(2x)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}\cdot 2x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\cdot 4x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\cdot 8x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

よって, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1,\ -1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)}$.

(4)
$$\begin{aligned} e^{2x}\log(1+3x) &= \left(1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)\right)\left(3x - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{3}(3x)^3 + o(x^3)\right) \\ &= \left(1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\right)\left(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 3x + \frac{3}{2}x^2 + 6x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

よって, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(0,\ 3,\ \frac{3}{2},\ 6\right)}$.

(5) まず,

$$\sin x + \cos x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

ここで, $\dfrac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$ $(X \to 0)$ に注意して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x + \cos x} &= \frac{1}{1 + (x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))} \\ &= 1 - \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 - (x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= 1 - \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + (x^2 - x^3) - x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

よって, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1,\ -1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{11}{6}\right)}$.

$\boxed{3}$ (6) $x \to 0$ のとき, まず $\mathrm{Tan}^{-1}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ に注意する. これは, 例えば $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ を 0 から x まで積分して得られる. 問題の極限値の分母は $x - \mathrm{Tan}^{-1}\, x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ であるから, それに釣り合うように, 分子の方も $o(x^3)$ を用いて表す:

$$x(e^x - \sin x - 1) = x\left\{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - (x + o(x^2)) - 1\right\} = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

よって,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x - \sin x - 1)}{x - \mathrm{Tan}^{-1}\, x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

$\boxed{4}$ (7) $$\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx = \int\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2-1}\right)dx = \int (x^2+1)\,dx + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \boxed{\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} \quad (\text{積分定数は省略}).$$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+A}\right|$ (A は定数) であるから,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}}} = \left[\log\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x-1}\right)\right]_1^2$$
$$= \log\frac{\frac{5}{2} + \sqrt{5}}{\frac{5}{2}} = \boxed{\log\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \boxed{\log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}.$$

ここで, $x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x-1}$ は $1 \leqslant x \leqslant 2$ の範囲では正の値をとるから, log の真数部分に絶対値の記号でなく, 通常の括弧を用いている.

(9) $u = \sqrt{2x-3}$ とおけば, $x = \frac{1}{2}(u^2+3)$, $dx = u\,du$ であるから,

$$\int_2^6 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(u^2+3)}{u}\,u\,du = \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+3)\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3} + 3u\right]_1^3 = \boxed{\frac{22}{3}}.$$

【別法】 $\dfrac{x}{\sqrt{2x-3}} = \dfrac{\frac{1}{2}(2x-3) + \frac{3}{2}}{\sqrt{2x-3}} = \dfrac{1}{2}(2x-3)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{3}{2}(2x-3)^{-\frac{1}{2}}$ より,

$$\int_2^6 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\cdot(2x-3)^{\frac{1}{2}}\right]_2^6 = \frac{27-1}{6} + \frac{3(3-1)}{2} = \boxed{\frac{22}{3}}.$$

(10) 部分積分法により,

$$\int_0^1 x(\mathrm{Tan}^{-1}\, x)^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}(\mathrm{Tan}^{-1}\, x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}\, x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}\, x}{x^2+1}\,dx.$$

ここで,

$$\frac{x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}\, x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)\,\mathrm{Tan}^{-1}\, x - \mathrm{Tan}^{-1}\, x}{x^2+1} = \mathrm{Tan}^{-1}\, x - \frac{1}{2}\{(\mathrm{Tan}^{-1}\, x)^2\}'$$

であるから,

$$\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}\, x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \mathrm{Tan}^{-1}\, x\,dx - \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Tan}^{-1}\, x)^2\right]_0^1$$
$$= \left[x\,\mathrm{Tan}^{-1}\, x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{\pi^2}{32}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi^2}{32}.$$

よって,

$$\int_0^1 x(\mathrm{Tan}^{-1}x)^2\,dx = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi^2}{32}\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2}.$$

【別法】本質的な考え方は上と同じだが, $x = \frac{1}{2}(x^2+1)'$ と見れば, 計算量を減らせる.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(\mathrm{Tan}^{-1}x)^2\,dx &= \left[\frac{x^2+1}{2}(\mathrm{Tan}^{-1}x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2\,\mathrm{Tan}^{-1}x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = \frac{\pi^2}{16} - \left[x\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2}.\end{aligned}$$

5 A が正方行列のとき, A と同じサイズの単位行列 E を並べた行列 $[A\ \ E]$ に行基本変形を繰り返して $[E\ \ B]$ の形まで変形できたなら, A は正則行列であり, B が A の逆行列を与える.

(11)
$$\begin{bmatrix}2&5&1&1&0&0\\3&7&1&0&1&0\\4&10&3&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&5&1&1&0&0\\1&2&0&-1&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-1&1&0\\2&5&1&1&0&0\\0&0&1&-2&0&1\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&2&0&-1&1&0\\0&1&1&3&-2&0\\0&0&1&-2&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-1&1&0\\0&1&0&5&-2&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-11&5&2\\0&1&0&5&-2&-1\\0&0&1&-2&0&1\end{bmatrix}$$

であるから, $\begin{bmatrix}2&5&1\\3&7&1\\4&10&3\end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix}-11&5&2\\5&-2&-1\\-2&0&1\end{bmatrix}}$.

(12)
$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\2&3&3&3&0&1&0&0\\2&4&5&5&0&0&1&0\\2&4&6&7&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&-2&1&0&0\\0&2&3&3&-2&0&1&0\\0&2&4&5&-2&0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&3&-1&0&0\\0&1&1&1&-2&1&0&0\\0&0&1&1&2&-2&1&0\\0&0&2&3&2&-2&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&3&-1&0&0\\0&1&0&0&-4&3&-1&0\\0&0&1&1&2&-2&1&0\\0&0&0&1&-2&2&-2&1\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&3&-1&0&0\\0&1&0&0&-4&3&-1&0\\0&0&1&0&4&-4&3&-1\\0&0&0&1&-2&2&-2&1\end{bmatrix}$$ より, $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&3&3&3\\2&4&5&5\\2&4&6&7\end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix}3&-1&0&0\\-4&3&-1&0\\4&-4&3&-1\\-2&2&-2&1\end{bmatrix}}$.

6 (13) $|A| = \begin{vmatrix}1&2&1\\2&6&7\\2&6&5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&1\\0&2&5\\0&2&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&1\\0&2&5\\0&0&-2\end{vmatrix} = \boxed{-4}$.

(14) $|B| = \begin{vmatrix}3&2&1\\1&2&3\\2&1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&-4&-8\\1&2&3\\0&-3&-4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-4&-8\\-3&-4\end{vmatrix} = 8$ より, $|-2B| = (-2)^3|B| = \boxed{-64}$.

(15) 上の結果を用いて, $|{}^tAB| = |A||B| = (-4)\,8 = \boxed{-32}$.

(16) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (-2)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)(-3) = \boxed{-6}.$$

【別法】$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\,(-3) = \boxed{-6}.$

7 (17) $\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 40 + 12 + 3 - 4 - 45 - 8 = -2$ より, 求める体積は

$$\left|\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \end{bmatrix}\right| = |-2| = \boxed{2}.$$

8 (18) 列基本変形と行列式の関係に注意して,

$$\begin{aligned} |B| &= \left| \boldsymbol{a} \quad 2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b} \quad 4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c} \quad 6\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{c}-6\boldsymbol{d} \right| \\ &= \left| \boldsymbol{a} \quad -2\boldsymbol{b} \quad -4\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c} \quad -6\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{c}-6\boldsymbol{d} \right| \\ &= \left| \boldsymbol{a} \quad -2\boldsymbol{b} \quad -4\boldsymbol{c} \quad -6\boldsymbol{c}-6\boldsymbol{d} \right| = \left| \boldsymbol{a} \quad -2\boldsymbol{b} \quad -4\boldsymbol{c} \quad -6\boldsymbol{d} \right| \\ &= (-2)(-4)(-6)\left| \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c} \quad \boldsymbol{d} \right| = -48|A| = -48\cdot 4 = \boxed{-192}. \end{aligned}$$

【別法】$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & 2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b} & 4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c} & 6\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{c}-6\boldsymbol{d} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ より,

$$|B| = |A|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 4\cdot 1(-2)(-4)(-6) = \boxed{-192}.$$

9 (19) ($\widetilde{A}$ の $(4,1)$ 成分) $=$ (A の $(1,4)$ 余因子)

$$= (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-7}.$$

(20) まず, $A\widetilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとり, $|A||\widetilde{A}| = |A|^4$. ここで,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

であるから, $|\widetilde{A}| = |A|^3 = (-4)^3 = \boxed{-64}.$