2019 年度 数学演習第二 第 1 回「前学期の復習」解答例

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c_1, c_2, c_3$は任意$)$．(2) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c_1, c_2$は任意$)$.

(3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -10 \\ -3 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -10 & 9 & 25 \\ 0 & 7 & -10 & -36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & -11 \\ 0 & 7 & -10 & -36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -21 \\ 0 & -3 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & -12 & -58 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -21 \\ 0 & 1 & -12 & -58 \\ 0 & 0 & -37 & -185 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ より，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$．(4) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ (1) 係数行列が非正則，つまり行列式が 0 となるときであるから，$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a - 5$ より，$a = \dfrac{5}{2}$.

(2) 係数行列の行列式は，$(a-4)(a+2)^2$ より，$a = 4, -2$.

$\boxed{3}$ (1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 17 & -13 & 2 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2-a \\ 0 & 2 & -8 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 3a-5 \\ 0 & 1 & -4 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 2a-7 \end{array}\right]$ より，$a = \dfrac{7}{2}$.

(2) $31p - 16q - 13r = 0$.

$\boxed{4}$ (1) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 9 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$ より，階数 3 で正則．逆行列は，$\begin{bmatrix} 0 & 14 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$．(2) 階数 2．(3) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，階数 3 で非正則．(4) 階数 4 で，逆行列は，$\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{5}$ (1) $\begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & 0 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2(\lambda+2)$．(2) 55．(3) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 17 & 2 & 4 \\ 2 & 11 & 4 & -3 \\ 4 & 23 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & -13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -2 \\ 1 & -2 & -7 \\ 3 & -13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & -7 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ -7 & 15 \end{vmatrix} = -(-45+84) = -39$．(4) $\lambda^2(\lambda-2)^2$.

$\boxed{6}$ (1) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$，$\beta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおく．$0 < \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{2} < 1$ より $0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ となり，$0 < 2\alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$．一方，$\tan 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \dfrac{4}{3}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{7}$ より，$\tan(2\alpha - \beta) = \dfrac{\tan 2\alpha - \tan\beta}{1 + \tan 2\alpha \tan\beta} = 1$．よって，$2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{15}$ とおくと，$\cos\theta = \dfrac{1}{4}$.

$\boxed{7}$ (1) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$. (2) $\log|x^3-3x+2| = 2\log|x-1| + \log|x+2|$ だから，$n \geqq 1$ で，$f^{(n)}(x) = \dfrac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left\{\dfrac{2}{(x-1)^n} + \dfrac{1}{(x+2)^n}\right\}$. (3) ライプニッツの公式から，$f^{(n)}(x) = x^2(\sin x)^{(n)} + 2nx(\sin x)^{(n-1)} + n(n-1)(\sin x)^{(n-2)} = x^2\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right) + 2nx\sin\left(x+\dfrac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1)\sin\left(x+\dfrac{n-2}{2}\pi\right) = \{x^2-n(n-1)\}\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right) - 2nx\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$.

$\boxed{8}$ いずれも $x \to 0$ で考える．(1) $e^{x^2} = 1+x^2+\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)$，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^4)$ だから，$\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^4)$．(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ を積分して $x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$.

$\boxed{9}$ (1) $x \to 0$ で，$\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)$，$e^{x^2} = 1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^5)$ だから，分子$=\dfrac{x^5}{20}+o(x^5)$．分母$=\dfrac{x^5}{2}+o(x^5)$．よって求める極限値は $\dfrac{1}{10}$. (2) ロピタルの定理を適用して $-\dfrac{1}{3}$. (3) $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)^x = x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)$ において, $x \to \infty$ のとき $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x) \to \log\dfrac{\pi a}{2} \lesseqqgtr 0$ $\left(a \lesseqqgtr \dfrac{2}{\pi}\right)$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x) = -\infty$ $(0 < a < \frac{2}{\pi})$, $= \infty$ $(a > \frac{2}{\pi})$. $a = \frac{2}{\pi}$ のときは不定形であり, ロピタルの定理により, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(\mathrm{Tan}^{-1}x)+\log\frac{2}{\pi}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}$. よって求める極限値は $e^{-\frac{2}{\pi}}$．(4) $\dfrac{\tan x}{x}-1 = \dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$ と $\log(1+x) = x+o(x)$ から，$\log\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = \dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$ より，極限値は $e^{\frac{1}{3}}$.

$\boxed{10}$ (1) $\displaystyle\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = \frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\log(1+x^2)+C$.

(2) $3x^2+x-2 = t$ とおくと，$\displaystyle\int_1^2\frac{6x+1}{3x^2+x-2}dx = \int_2^{12}\frac{1}{t}dt = [\log t]_2^{12} = \log 6$．(3) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ より，$\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{1+2\cos x} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2}{3-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-t}+\frac{1}{\sqrt{3}+t}\right)dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\log 2}{\sqrt{3}}$．(4) 被積分関数は $x = 0, 1$ で発散しているので広義積分．$0 < \varepsilon < a < 1$ をとって，$\displaystyle\int_\varepsilon^a\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_\varepsilon^a\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \left[\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)\right]_\varepsilon^a = \mathrm{Sin}^{-1}(2a-1) - \mathrm{Sin}^{-1}(2\varepsilon-1)$．ここで $a \to 1$ のとき，$\mathrm{Sin}^{-1}(2a-1) \to \mathrm{Sin}^{-1}1 = \dfrac{\pi}{2}$．$\varepsilon \to 0$ のとき，$\mathrm{Sin}^{-1}(2\varepsilon-1) \to \mathrm{Sin}^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$．よって求める広義積分の値は π.

(5) 広義積分. $0 < M$ をとって，$\displaystyle\int_0^M\frac{x}{e^x}dx$ を考える. $\displaystyle\int_0^M\frac{x}{e^x}dx = -\int_0^M x(e^{-x})'dx = -[xe^{-x}]_0^M + \int_0^M e^{-x}dx = -Me^{-M} - e^{-M} + 1 \to 1$ $(M \to +\infty)$．[注意] ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$, これを用いた.