数学演習第二（演習第２回）　【解答例】

線形：直線・平面の方程式と外積　2019 年 10 月 9 日 実施

1

(1) $(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}2\\11\\10\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r})=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}9\\-3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\15\\15\end{bmatrix}$. (外積の結合律は一般に不成立!)

(2) $\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}_2$ と $\boldsymbol{a}$ との内積をとり, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=t\|\boldsymbol{a}\|^2$. よって $t=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ となり, $\boldsymbol{b}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.
更に, $\|\boldsymbol{b}_1\|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, $\|\boldsymbol{b}_2\|=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{b}_1\|^2}=\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ ($\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}$ が直角三角形をなすことに注意). ここまでは $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ のベクトルで成立するが, $\|\boldsymbol{b}_2\|$ については, 空間ベクトルであれば外積を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, 平面ベクトルであれば行列式を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{|\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}]|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ と表せる.

(3) $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=3-8-10=-15$, $\|\boldsymbol{p}\|=3$, $\|\boldsymbol{q}\|=5\sqrt{2}$. また, $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ のなす角 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ は,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{p}\|\|\boldsymbol{q}\|}=\frac{-15}{3\cdot 5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad より,\quad \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

更に, $\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{p}$ 方向の直線への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|^2}\boldsymbol{p}=\dfrac{-15}{9}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5/3\\10/3\\-10/3\end{bmatrix}$.

(4) $\det[\,\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\,]=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ を第 3 列に関して余因子展開し, そのあと外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned}\det[\,\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\,]&=c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\\&=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

この関係式を用いて, ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\det[\,\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}\,]=0$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\det[\,\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{b}\,]=0$ (同じ列を含む行列式の値は 0). ② $\det[\,\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2\geqslant 0$. あとは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ を示す必要があるが, 図形的に考えれば $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積) なので, これは明らか.

(5) 転置行列の定義より, 一般に $P\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}P\boldsymbol{b}$ が成り立つ. これを用いて, $Q\boldsymbol{a}\cdot Q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}QQ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 更に,
$(Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\det[Q\boldsymbol{a}\ \ Q\boldsymbol{b}\ \ Q{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=(\det Q)\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ {}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ $(\forall\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3)$
であるから, $Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が従う.

【注】直交変換 (直交行列の掛け算) はベクトルの回転移動 (行列式 1) や鏡像変換 (行列式 -1) を表す. ここでの主張より, ① 内積やノルムは直交不変, すなわちベクトルを直交変換する前後で値が変わらない. ② ベクトルを直交変換してから外積をとったものと, 外積をとってから直交変換したものを比べると, 回転移動なら一致するが, 鏡像変換なら向きが逆転する.

2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}={}^{\mathrm{t}}(1,-4)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}={}^{\mathrm{t}}(2,-2)$ より, ($\triangle$ABC の面積) $=\dfrac{1}{2}\left|\det[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \ \overrightarrow{\mathrm{AC}}]\right|=3$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}={}^{\mathrm{t}}(2,-2,-6)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}={}^{\mathrm{t}}(-2,-1,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}={}^{\mathrm{t}}(3,0,-2)$ より, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}={}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)$ となり,

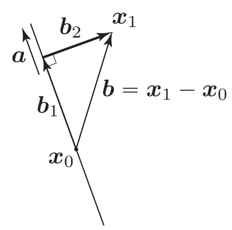
$$(\triangle\mathrm{ABC}\ の面積)=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|=\frac{1}{2}\|{}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)\|=5\sqrt{2},$$

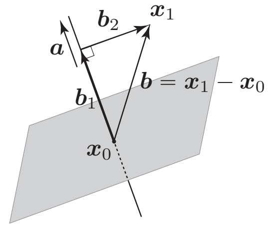
$$(四面体\ \mathrm{ABCD}\ の体積)=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\frac{1}{6}\left|{}^{\mathrm{t}}(-8,10,-6)\cdot{}^{\mathrm{t}}(3,0,-2)\right|=\frac{1}{6}|-12|=2.$$

3

(1) ① 点 $\boldsymbol{x}_1$ と① の直線 ℓ との距離は $\boxed{1}$ (2) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_2\|$ に等しい (下左図). よって, 求める距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}_0+\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ で与えられる.)

② 点 $\boldsymbol{x}_1$ と② の平面 P との距離は $\boxed{1}$ (2) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_1\|$ に等しい (下右図). よって, 求める距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}_1-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ で与えられる.) 平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0+d=0$ であるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d$ となり, 距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ と表される.





(2) ① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}$ が直線 AB の方向ベクトルを与えるので, 直線 AB の方程式は $\dfrac{x-1}{-1}=y-2=\dfrac{z+1}{3}$.

② $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-7\\4\end{bmatrix}$ が平面 ABC の法線ベクトルを与えるから, 平面 ABC の方程式は

$$5(x-1)-7(y-2)+4(z+1)=0.\quad これを整理して,\ 5x-7y+4z+13=0.$$

次に, (1)② を利用するために, $\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ (A の位置ベクトル), $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$ (D の位置ベクトル), $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}5\\-7\\4\end{bmatrix}$ (平面 ABC の法線ベクトル) とおけば, 点 D と平面 ABC の距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{30}{3\sqrt{10}}=\sqrt{10}$.

③ ②と同じ意味で $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{a}$ を用いる. 直線 ℓ は点 A を通り, $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}5\\-7\\4\end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, その方程式は $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-2}{-7}=\dfrac{z+1}{4}$. また, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}5\\-7\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\-8\end{bmatrix}$ より, (1)① を用いて, 点 D とこの直線の距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}=1$.

【注】②, ③の距離は D から平面, 直線に下ろした垂線の長さである. ②では D から平面 ABC に垂線 DE を下ろせば, $\mathrm{E}(2+5s,-1-7s,4s)$ が $5x-7y+4z+13=0$ 上にあるから $s=-1/3$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\|=\sqrt{10}$. ③では D から "A を通る平面 ABC の法線" に垂線 DF を下ろせば, $\mathrm{F}(1+5t,2-7t,-1+4t)$ が $\overrightarrow{\mathrm{DF}}\perp\boldsymbol{a}$ を満たすから $t=1/3$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\|=1$.

(3) 2 平面の法線ベクトルが $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$ であるから, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-4\\2\\-8\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}$ が交線の方向ベクトルとなる. 一方, 交線と xy 平面との交点は $\begin{cases}-x+2y+z=3\\3x+2y-z=-1\\z=0\end{cases}$ を解いて, $(x,y,z)=(-1,1,0)$. よって, 交線の方程式は $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{4}$ $\big(\Leftrightarrow\ x=-1+2t,\ y=1-t,\ z=4t\big)$. あるいは, 交線上の点は連立 1 次方程式 $\begin{cases}-x+2y+z=3\\3x+2y-z=-1\end{cases}$ の解であると考えて, 行基本変形 $\begin{bmatrix}-1&2&1&3\\3&2&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-1&-3\\0&4&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$ により, 上と同じパラメータ表示を得る. 次に, 2 平面のなす角 θ ($0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$) は 2 平面の法線同士のなす角に等しいから, $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\dfrac{0}{\sqrt{6}\sqrt{14}}=0$. よって, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

【注】2 直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ であるとき, この 2 直線のなす角 θ ($0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$) は「$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角」または「$\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b}$ のなす角」のいずれかで与えられる. 従って, $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ が成り立つ.

(4) ① 直線 ℓ 上の点 $(-2+t,\ -1+3t,\ 4-2t)$ を平面 α の方程式 $2x-y+3z=2$ に代入して,

$$2(-2+t)-(-1+3t)+3(4-2t)=2.\qquad\therefore\ t=1.$$

よって, 交点 $\boldsymbol{x}_0$ の座標は $(-1,2,2)$.

② α の法線ベクトルが $\boldsymbol{a}:=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$, ℓ の方向ベクトルが $\boldsymbol{b}:=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$ であるから, $\boldsymbol{b}$ の平面 α への正射影は

$$\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}-\frac{-7}{14}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\5\\-1\end{bmatrix}\mathbin{/\!/}\begin{bmatrix}4\\5\\-1\end{bmatrix}.$$

よって, 直線 m の方程式は $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-2}{-1}$.

③ $\boldsymbol{c}:=\begin{bmatrix}4\\5\\-1\end{bmatrix}$ が直線 m の方向ベクトルであるから, 直線 ℓ,m のなす角を θ ($0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$) とすれば,

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|}=\frac{|4+15+2|}{\sqrt{14}\sqrt{42}}=\frac{21}{14\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}.$$

④ 求める平面は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\5\\-1\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\mathbin{/\!/}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする. よって,

$$(x+1)-(y-2)-(z-2)=0,\quad すなわち\quad x-y-z=-5.$$