数学演習第二 （演習第２回）

線形：直線・平面の方程式と外積

2019 年 10 月 9 日 実施

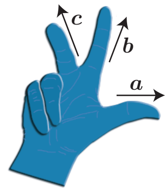
1 [内積, 外積] (線形 p.4, pp.7–8)

- 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して, **ノルム** (**大きさ**) $\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,

  内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \; (= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})$, **外積** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} (= -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$

  が定義される (内積とノルムについては $\mathbb{R}^n$ のベクトルに対しても同様に定義される).
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq 0$ のとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ とすれば, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ が成り立つ. また, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ が 1 次独立のとき, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ は次の性質により特徴付けられる (一意に定まる):
  ① $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と直交, ② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は右手系, ③ $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積$)$.

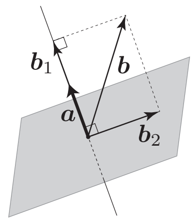
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ が**右手系** (をなす) とは, 右手の親指, 人差し指, 中指の 3 本だけを立てたとき, 3 本の指が指す方向をこの順に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の方向に合わせることができることをいう. 特に, $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は右手系をなす. 行列式を用れば, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ が右手系とは, $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] > 0$ であることに他ならない. ここで, $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 列に並べてできる行列 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ の行列式を表す.



---

(1) $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, $(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r})$ を計算せよ.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ $(\boldsymbol{b}_1 = t\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{a} = 0)$ の形に分解せよ. (このとき, $\boldsymbol{b}_1$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ 方向の直線」への**正射影** (または $\boldsymbol{a}$ への正射影), $\boldsymbol{b}_2$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルとする平面」への正射影と呼ぶ.) 更に, $\|\boldsymbol{b}_1\|$ と $\|\boldsymbol{b}_2\|$ を $\|\boldsymbol{a}\|, \|\boldsymbol{b}\|, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ を用いて表せ ($\boxed{2}$ の説明も見よ).



(3) (1) の $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ に対して, $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$, $\|\boldsymbol{p}\|$, $\|\boldsymbol{q}\|$, “$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ のなす角”, “$\boldsymbol{q}$ の $\boldsymbol{p}$ への正射影” を求めよ.

(4) $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3)$ を第 3 列に関して余因子展開して $\boxed{\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}}$ を示せ. 更に, この関係式を用いて, 次を示せ: ① $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$, ② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次独立ならば $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] > 0$ (すなわち $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は右手系).

(5) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, 3 次**直交行列** Q $(\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^{\mathrm{t}}QQ = Q\,{}^{\mathrm{t}}Q = E)$ に対して, $Q\boldsymbol{a} \cdot Q\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (従って $\|Q\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|$) 及び $Q\boldsymbol{a} \times Q\boldsymbol{b} = \pm Q(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ ($\pm$ は $\det Q \in \{1, -1\}$ の符号) を示せ.

2 [面積, 体積] (線形 p.6, p.8, pp.85–86)

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ (平面ベクトル) に対して,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S = \left|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}]\right| \left(= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}\,\right)$.
- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ (空間ベクトル) に対して,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \left(= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}\,\right)$,
  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $V = \left|\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\right| \left(= |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|\,\right)$.

---

(1) $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(2, -1)$, $\mathrm{C}(3, 1)$ のとき, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ.

(2) $\mathrm{A}(-1, 2, 1), \mathrm{B}(1, 0, -5), \mathrm{C}(-3, 1, 2), \mathrm{D}(2, 2, -1)$ のとき, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積, 四面体 ABCD の体積を求めよ. ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の作る平行四辺形, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の作る平行六面体を考えよ.)

$\boxed{3}$ 【空間内の直線と平面】 (線形 pp.10–13)

ここでは, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ とし, 点 (x_0, y_0, z_0) と位置ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を同一視する.

ⓐ 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a} \neq 0$ を**方向ベクトル**とする直線 ℓ は (ℓ 上の任意の点を $\boldsymbol{x}$ として)

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \qquad \text{(直線 } \ell \text{ のベクトル方程式)}$$

と表される. これを成分表示し, パラメータ t を消去することにより,

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}} \qquad \text{(直線 } \ell \text{ の方程式)}$$

が得られる. (この表現は $abc \neq 0$ のときのみ意味を持つ. 例えば $a = 0$, $bc \neq 0$ なら, $x = x_0$, $\dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ となる.)

ⓑ 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (1 次独立) で '張られる' 平面 α は (α 上の任意の点を $\boldsymbol{x}$ として)

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{c}} \qquad \text{(平面 } \alpha \text{ のベクトル方程式)}$$

と表される. 平面 α の**法線ベクトル** $\boldsymbol{a}$ (例えば $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$) と上式との内積をとれば, パラメータ s, t が消去され, $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0}$ が得られる (点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルとする平面). これを成分表示して,

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0} \qquad \text{(平面 } \alpha \text{ の方程式)}$$

を得る. (通常は $ax + by + cz + d = 0$ あるいは $ax + by + cz = d'$ の形に整理する.)

---

(1) $\boxed{1}$(2) を利用して次を示せ.

① 点 $\boldsymbol{x}_1$ と ⓐ の直線の距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる.

② 点 $\boldsymbol{x}_1$ と ⓑ の平面 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ との距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる. 平面が $ax + by + cz + d = 0$ の形なら $\boxed{\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$ となる.

(2) $\mathrm{A}(1, 2, -1)$, $\mathrm{B}(0, 3, 2)$, $\mathrm{C}(-2, 1, 1)$, $\mathrm{D}(2, -1, 0)$ とする. ① 直線 AB (2 点 A, B を通る直線) の方程式を求めよ. ② 平面 ABC (3 点 A, B, C を通る平面) の方程式を求めよ. (まず法線ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.) また, 点 D とこの平面の距離を求めよ. ③ 点 A を通る平面 ABC の**法線** (ℓ とする) の方程式を求めよ. また, 点 D と直線 ℓ の距離を求めよ.
【注】②, ③ の距離は, それぞれ点 D から平面 ABC, 直線 ℓ に下ろした垂線の長さに他ならない. この点に注目すれば (1) を利用しなくても計算できる (まず "垂線の足" の座標を求める).

(3) 2 平面 $\alpha:\ -x + 2y + z = 3$, $\beta:\ 3x + 2y - z = -1$ に対して, ① 2 平面 α, β の交線の方程式を求めよ. (交線の方向ベクトルは 2 平面の法線ベクトルと直交することに注意. また, 交線が通る点としては例えば xy 平面との交点を考えるとよい. あるいは, 交線を連立 1 次方程式の解の集合と考えてもよい.) ② 2 平面 α, β のなす角を求めよ.

(4) 直線 $\ell : x + 2 = \dfrac{y + 1}{3} = \dfrac{z - 4}{-2}$ と平面 $\alpha : 2x - y + 3z = 2$ に対して, ① 直線 ℓ と平面 α の交点 $\boldsymbol{x}_0$ を求めよ. ② 直線 ℓ を平面 α 上に正射影して得られる直線 m ($\boldsymbol{x}_0$ を通り, "ℓ の方向ベクトルの平面 α への正射影" を方向ベクトルとする直線) の方程式を求めよ. ③ 2 直線 ℓ, m のなす角 (= 直線 ℓ と平面 α のなす角) を求めよ. ④ 2 直線 ℓ, m を含む平面の方程式を求めよ.