数学演習第二 第 3 回 「ベクトル空間・部分空間」 解答例 (2019.10.23 実施)

$\boxed{1}$ 部分空間となるのは，$\boxed{(2),(7),(9),(10)}$．部分空間とならないことを示すには，(i),(ii),(iii) のいずれかひとつを満たさない具体的な反例をあげる．

(1) $\mathbf{0} \notin W$ より (i) が不成立．(2) $\mathbf{0} \in W$．$x_i, y_i\ (i=1,2), k \in \mathbb{R}$ に対し，$2x_1 = 3y_1$ かつ $2x_2 = 3y_2$ のとき，$2(x_1+x_2) = 3(y_1+y_2)$．$2(kx_1) = 3(kx_2)$．(3) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \in W$ だが，$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \notin W$ より (ii) が不成立．(4) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \in W$ だが，$(-1)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} \notin W$ より (iii) が不成立．(5) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in W$ だが，$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \notin W$ より (iii) が不成立．(6) $\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \in W$ だが，$2 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \notin W$ より (iii) が不成立．(7) $\mathbf{0} \in W$．$\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix} \in W\ (i=1,2)$ のとき，$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = (x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2) = 0$，$2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+4(z_1+z_2) = (2x_1+y_1+4z_1)+(2x_2+y_2+4z_2) = 0$，$-(x_1+x_2)-3(y_1+y_2)+3(z_1+z_2) = (-x_1-3y_1+3z_1)+(-x_2-3y_2+3z_2) = 0$ だから，$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{bmatrix} \in W$．また，$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}$ に対し，$(kx)+(ky)+(kz) = k(x+y+z) = 0$，$2(kx)+(ky)+4(kz) = k(2x+y+4z) = 0$，$-(kx)-3(ky)+3(kz) = k(-x-3y+3z) = 0$ より，$k\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}kx\\ky\\kz\end{bmatrix} \in W$．[注意]：一般に，$A$ を係数行列とする同次連立一次方程式の解全体 $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ はベクトル空間である（**教科書 命題 15.4**）．(8) $\mathbf{0} \notin W$ より (i) が不成立．(9) $W = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2y+z=0,\ z-2x=0,\ -x-y=0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}t\\-t\\2t\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$．$t=0$ とすれば $\mathbf{0} \in W$．$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$\begin{bmatrix}t_1\\-t_1\\2t_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t_2\\-t_2\\2t_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_1+t_2\\-(t_1+t_2)\\2(t_1+t_2)\end{bmatrix} \in W$．また，$k \in \mathbb{R}$ に対して，$k\begin{bmatrix}t\\-t\\2t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(kt)\\-(kt)\\2(kt)\end{bmatrix} \in W$．(10) $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&4\\-1&-3&3\end{bmatrix}$ とおくと，$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\2&1&4&b\\-1&-3&3&c\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&-1&2&b-2a\\0&-2&4&c+a\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&-1&2&b-2a\\0&0&0&5a-2b+c\end{array}\right]$ より，$W = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 5a-2b+c=0 \right\}$．これは (7) と同様の議論で部分空間の条件を満たす．[注意]：一般に，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ が解を持ち，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ が解を持つとき，それぞれの解を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とすれば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ は解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ を持つ．また，$k \in \mathbb{R}$ に対し，$A\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{b}_1$ は解 $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}_1$ を持つ．従って，$\{\boldsymbol{b} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ $\}$ はベクトル空間である．

$\boxed{2}$ (1) $\left[\begin{array}{cc|cc}-1&2&1&3\\2&-4&2&-6\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc}1&-2&-1&-3\\0&0&4&0\end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$，$\boldsymbol{w} \in W$．

(2) $\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&13&13\\2&3&-1&4&2\\1&2&2&-9&7\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&13&13\\0&1&5&-22&-24\\0&1&5&-22&-6\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&13&13\\0&1&5&-22&-24\\0&0&0&0&18\end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \in W$，$\boldsymbol{w} \notin W$．

(3) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\2&3&1&b\\4&1&3&c\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\0&5&-1&b-2a\\0&5&-1&c-4a\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&a\\0&5&-1&b-2a\\0&0&0&-b+c-2a\end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \in W \Leftrightarrow 2a+b-c=0$．

(4) $\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&1\\2&-1&1&1\\1&3&1&2\\2&3&3&4\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&1\\0&1&3&3\\0&4&2&3\\0&5&5&6\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&1\\0&1&3&3\\0&0&-10&-9\\0&0&-10&-9\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&1\\0&1&3&3\\0&0&-10&-9\\0&0&0&0\end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \in W$．

(5) $\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \in W$，$\boldsymbol{w} \notin W$.

$\boxed{3}$ (1) W_1 は直線 $y = -\dfrac{3}{2}x$．W_2 は直線 $y = 2x$．共通部分 $W_1 \cap W_2$ は 2 直線の交点である原点のみ．和集合 $W_1 \cup W_2$ は 2 直線全体．和集合 $W_1 \cup W_2$ を考える．$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \in W_1$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in W_2$ の和 $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ は，直線 $y = -\dfrac{3}{2}x$ 上にも $y = 2x$ 上にも存在しないので $W_1 \cup W_2$ に属さない．従って $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間ではない．和空間 $W_1 + W_2$ を考える．$y = -\dfrac{3}{2}x$ の方向ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ と $y = 2x$ の方向ベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を取ると，$W_1 + W_2 = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} (= \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle)$ である．$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を取ると，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}$ となる c_1, c_2 を求めるには，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$ を解けばよいので，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 | \boldsymbol{v}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ -3 & 2 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 3 & a+b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -a-b \\ 0 & 7 & 3a+2b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a-b}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3a+2b}{7} \end{array}\right]$．($[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ を用いてもよい．) よって，$\boldsymbol{v} = \dfrac{2a-b}{7}\boldsymbol{v}_1 + \dfrac{3a+2b}{7}\boldsymbol{v}_2$ と表せ，$\boldsymbol{v} \in \rangle = W_1 + W_2$．従って，$\mathbb{R}^2$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2$ に属することになるから，$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$．(図示はいずれも省略する．)

(2) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は，$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & -5 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+b \\ 0 & -6 & -a+c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 2a+3b+c \end{array}\right]$ より，$2a + 3b + c = 0$．つまり，W_1 は平面 $2x + 3y + z = 0$ を表している．別の見方をすると，$W_1 = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ は，$\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ によって張られる平面であるから，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ と垂直で原点を通る平面 $2x + 3y + z = 0$ となる．同様に W_2 についても，$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ -1 & 2 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a+b \\ 0 & 2 & a+c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a+b \\ 0 & 0 & 3a-2b+c \end{array}\right]$ より，W_2 は平面 $3x - 2y + z = 0$．外積 $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ からもわかる．共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ の解全体に一致するから，$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ から，$W_1 \cap W_2$ に属する元は，$k\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ となる．これは，原点を通り，方向ベクトル $\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ の直線である．別の見方をすると，2 つの平面 W_1, W_2 の交線は，W_1, W_2 の法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ のいずれとも垂直であるから，$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -26 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし，原点を通る直線となる．また，$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & -5 & -1 & 2 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -a+c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2a+3b+c \end{array}\right]$ から，$\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので，$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$．なお，$W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならないことは，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が，平面 $2x + 3y + z = 0$ 上にも，平面 $3x - 2y + z = 0$ 上にもないため，$W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる．