令和元年度 数学演習第二 演習 第４回　微積：偏微分 [1]（偏微分, 合成関数の微分）　解答例

2019 年 10 月 30 日 実施分

1 $f_x(x,y) := \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, $f_y(x,y) := \lim_{k\to 0}\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$ がそれぞれの定義式である．$f \in C^2(D)$ ならば, $f_{xy}(x,y) := (f_x)_y(x,y) = (f_y)_x(x,y) =: f_{yx}(x,y)$ $((x,y)\in D)$ に注意しておく．
［記号］ $C^n(D)$ は D 上の C^n 級関数全体の集合を表す．

(1) $f_x(x,y) = e^x\cos^2 y - 2e^y\sin x\cos x$, $f_y(x,y) = -e^y\sin^2 x - 2e^x\sin y\cos y$,
$f_{xx}(x,y) = 2e^y(\sin^2 x - \cos^2 x) + e^x\cos^2 y$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2(e^y\sin x\cos x + e^x\sin y\cos y)$,
$f_{yy}(x,y) = -e^y\sin^2 x + 2e^x(\sin^2 y - \cos^2 y)$.　 $\sin 2x, \sin 2y, \cos 2x, \cos 2y$ を用いて表現してもよい．

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$, $f_y(x,y) = \dfrac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$,
$f_{xx}(x,y) = \dfrac{3y^2}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\dfrac{3xy}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{3x^2}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(3) $f(x,y) = \dfrac{\log_e y}{\log_e x}$ より, $f_x(x,y) = -\dfrac{\log y}{x(\log x)^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{1}{y\log x}$, $f_{xx}(x,y) = \dfrac{\log y}{x^2(\log x)^2} + \dfrac{2\log y}{x^2(\log x)^3} = \dfrac{(\log x+2)\log y}{x^2(\log x)^3}$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\dfrac{1}{xy(\log x)^2}$, $f_{yy}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2\log x}$.

(4) $|y| < x$ (特に $x>0$) に注意して, $f_x(x,y) = \dfrac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_y(x,y) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$,
$f_{xx}(x,y) = \dfrac{y^3-2x^2y}{x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy}(x,y) = -\dfrac{y}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(5) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき, $(x^2+y^2)f = x^3y - xy^3$ の両辺を x で偏微分すると, $2xf + (x^2+y^2)f_x = 3x^2y - y^3$, $(x^2+y^2)^2 f_x = (3x^2y-y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)$ より, $f_x(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ が従う．同様にして, $f_y(x,y) = \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ を得る．$(x,y)=(0,0)$ のとき, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ が定義から容易にわかる．次に, 2 次偏導関数を計算する．$(x,y)\neq(0,0)$ のとき, $(x^2+y^2)^2 f_x = y(x^4+4x^2y^2-y^4)$ の両辺を x で偏微分すると, $4x(x^2+y^2)f_x + (x^2+y^2)^2 f_{xx} = 4xy(x^2+2y^2)$, $(x^2+y^2)^3 f_{xx} = 4xy\{(x^2+2y^2)(x^2+y^2) - (x^4+4x^2y^2-y^4)\}$ より, $f_{xx}(x,y) = \dfrac{4xy^3(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を得る．同様にして, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{4x^3y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$. $(0,0)$ での値を求めるために, 上の計算結果から, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $f_x(x,0) = 0$ $(x\neq 0)$, $f_x(0,y) = -y$ $(y\neq 0)$, $f_y(x,0) = x$ $(x\neq 0)$, $f_y(0,y) = 0$ $(y\neq 0)$ であることに注意する．これらを用いて, $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$, $f_{yy}(0,0) = 0$ が導かれる．よって, $f(x,y)$ は ($(0,0)$ を除いた領域で C^2 級であるが) $(0,0)$ の近傍で C^2 級でない．$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが, 極限値 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{yy}(x,y)$ はいずれも存在しない (平面の極座標を使えば示せる)．ここでの $f(x,y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) の有名な一例である．

2 $z = f(x,y)$ と $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ の合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ $(= g(t)$ とおく$)$ の微分に関する連鎖律
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \text{あるいは} \quad g'(t) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)$$
を適用する解答例を与える．

(1) $f_x(x,y) = \dfrac{(y/x)_x}{1+(y/x)^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{(y/x)_y}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\varphi'(t) = 2$, $\psi'(t) = -2t$ より,
$$g'(t) = -\frac{1-t^2}{(2t)^2+(1-t^2)^2}\cdot 2 + \frac{2t}{(2t)^2+(1-t^2)^2}\cdot(-2t) = \frac{-(2-2t^2)-4t^2}{t^4+2t^2+1} = -\frac{2}{t^2+1}$$
【補足】 実は, $g(t) = \pm\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t$ $(t \gtrless 0)$ である．実際, $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\,t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ とおけば $t = \tan\theta$ であるから, 倍角の公式を用いて $\tan(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1-t^2}{2t}$. よって, $t>0$ $(\Leftrightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2})$ のとき, $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1-t^2}{2t} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$. また, $t<0$ $(\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{3\pi}{2})$ のとき, $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1-t^2}{2t} = -\frac{\pi}{2} - 2\theta$.

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{(1+x^2+3y^2)_x}{1+x^2+3y^2} = \dfrac{2x}{1+x^2+3y^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{(1+x^2+3y^2)_y}{1+x^2+3y^2} = \dfrac{6y}{1+x^2+3y^2}$, $\varphi'(t) = 2t$, $\psi'(t) = 3t^2$ より, $g'(t) = \dfrac{2(t^2+1)\cdot 2t + 6(t^3+1)\cdot 3t^2}{1+(t^2+1)^2+3(t^3+1)^2} = \dfrac{18t^5+4t^3+18t^2+4t}{3t^6+t^4+6t^3+2t^2+5}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z=f(x,y)$ と $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ の合成関数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ ($=g(u,v)$ とおく) の微分の連鎖律

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{cases}\quad \text{あるいは}\quad \begin{cases}g_u(u,v)=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)\\ g_v(u,v)=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_v(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_v(u,v)\end{cases}$$

を適用する解答例を与える.

(1) $f(x,y)=y^x=e^{x\log y}$ だから, $f_x(x,y)=y^x\log y$, $f_y(x,y)=xy^{x-1}$. さらに $\varphi_u(u,v)=-v/u^2$, $\varphi_v(u,v)=1/u$, $\psi_u(u,v)=2u$, $\psi_v(u,v)=2v$ だから, $g_u(u,v)=(u^2+v^2)^{v/u}\log(u^2+v^2)\cdot\left(-\dfrac{v}{u^2}\right)+\dfrac{v}{u}(u^2+v^2)^{(v/u)-1}\cdot 2u=v(u^2+v^2)^{(v/u)-1}\left\{-\dfrac{u^2+v^2}{u^2}\log(u^2+v^2)+2\right\}$, $g_v(u,v)=\dfrac{v^2}{u}(u^2+v^2)^{(v/u)-1}\left\{\dfrac{u^2+v^2}{v^2}\log(u^2+v^2)+2\right\}$. ただし, $g(u,v)=(u^2+v^2)^{v/u}$ を u, v でそれぞれ偏微分することもできる.

(2) $f_x(x,y)=\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y)=-\dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $\varphi_u(u,v)=\cos v$, $\varphi_v(u,v)=-u\sin v$, $\psi_u(u,v)=\sin v$, $\psi_v(u,v)=u\cos v$ より, $g_u(u,v)=\dfrac{4\cos v\sin^2 v}{u}\cos v+\dfrac{-4\cos^2 v\sin v}{u}\sin v=0$ と, $g_v(u,v)=\dfrac{4\cos v\sin^2 v}{u}(-u\sin v)+\dfrac{-4\cos^2 v\sin v}{u}(u\cos v)=-4\cos v\sin v$ を得る. ただし, g の偏導関数を計算するだけなら $g(u,v)=\cos^2 v-\sin^2 v=\cos 2v$ と変形してから直接偏微分する方が簡単である.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\dfrac{\partial x}{\partial u}=3u^2$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}=6v$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}=6u$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}=3v^2$ より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}3u^2 & 6v\\ 6u & 3v^2\end{bmatrix}=9uv(uv-4)$.

(2) $\dfrac{\partial x}{\partial r}=\cos^3 t$, $\dfrac{\partial x}{\partial t}=-3r\cos^2 t\sin t$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin^3 t$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}=3r\sin^2 t\cos t$, より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}=3r\sin^2 t\cos^2 t$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $z=f(x,y)$ とする.

(1) $f_x=-\dfrac{2y}{x}+\dfrac{1}{y}$ より, $f_x(1,1)=-1$. $f_y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{y^2}$ より, $f_y(1,1)=1$. よって求める接平面の方程式は $z-3=-(x-1)+(y-1)$ を整理して $x-y+z=3$. また求める法線の方程式は $x-1=\dfrac{y-1}{-1}=z-3$.

(2) $f_x=\dfrac{4x}{2x^2-y-6}$ より, $f_x(2,1)=8$. $f_y=\dfrac{-1}{2x^2-y-6}$ より, $f_y(2,1)=-1$. よって求める接平面の方程式は $z=8(x-2)-(y-1)$ を整理して $8x-y-z=15$. また求める法線の方程式は $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 一般に, 3 種類の極限には論理的な関係はないので, (a) の極限または (b) の極限が存在しないことから, (c) の極限が存在しないとは云えないし, (c) の極限が存在しても, (a) の極限や (b) の極限が存在すると結論付けられない.

(1) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}x=0$. 一方, (x,y) を x 軸に沿って原点に近づけたときの $f(x,y)$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x,0)=0$ と y 軸に沿って原点に近づけたときの極限 $\displaystyle\lim_{y\to 0}f(0,y)=-1$ が異なるので (c) の極限は存在しない.

(2) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$. (c) の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ が有効で, このとき $(x,y)\to(0,0)$ は $r\to 0$ と同じことなので, あたかも (θ をパラメータと見なして) r の 1 変数関数のように扱える. 実際, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと, $f(x,y)=\cos\theta\sin\theta=(1/2)\sin 2\theta$ は区間 $[-1/2,1/2]$ の任意の値を取り得るから, (c) の極限は存在しない.

(3) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{|y|}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{|x|}=0$. (c) の極限については (2) と同様に, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおいて, $|f(x,y)|=(r/2)|\sin 2\theta|\leqq r/2\to 0$ $(r\to 0)$. よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

(4) $|f(x,y)|\leqq|x|\leqq\sqrt{x^2+y^2}$ から, $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ がわかる. 一方, $x\neq 0$ として, 例えば $y=1/n\pi$ $(n=1,2,3,\dots)$ を考えると, $n\to\infty$ のとき, $y=1/(n\pi)\to+0$ で, $f(x,1/(n\pi))=(-1)^n x$ なので, $\displaystyle\lim_{y\to 0}f(x,y)$ $(x\neq 0)$ は存在しない. よって, (b) の極限は存在しない.

【補足】 例えば, $\boxed{\mathbf{1}}$ (5) のような場面で, (a) や (b) の極限は自然に現れる. 実際, $\boxed{\mathbf{1}}$ (5) では

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\right)=\lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right)=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\right)=1.$$

一般に, $g(tx,ty)=g(x,y)$ $(t\neq 0)$, $g(1,0)\neq g(0,1)$ をみたす $(x,y)\neq(0,0)$ での C^2 級関数 $g(x,y)$ を用いて, $f(x,y)=xy\,g(x,y)$ $((x,y)\neq(0,0))$, $=0$ $((x,y)=(0,0))$ と定めれば, $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ が成り立つ.