令和元年度 数学演習第二

演習 第 4 回　微積：偏微分 [1] (偏微分, 合成関数の微分)

2019 年 10 月 30 日　実施

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x,y)$ について, 1 次と 2 次の偏導関数 $(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy})$ を全て求めよ.

(1)　$f(x,y) = e^x \cos^2 y - e^y \sin^2 x$　　(2)　$f(x,y) = \sqrt{x^2+xy+y^2}$　　(3)　$f(x,y) = \log_x y$

(4)　$f(x,y) = \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{y}{x}$　$(|y| < x)$　　(5)　$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

$\boxed{2}$ $f(x,y)$ に 1 変数関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ を合成した 1 変数関数 $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ の導関数 $g'(t)$ を求めよ (演習書 問題5.2.1 (1) 他).

(1)　$f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$,　$\varphi(t) = 2t$,　$\psi(t) = 1 - t^2$

(2)　$f(x,y) = \log_e(1 + x^2 + 3y^2)$,　$\varphi(t) = t^2 + 1$,　$\psi(t) = t^3 + 1$

$\boxed{3}$ $f(x,y)$ に 2 変数関数 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ を合成した 2 変数関数 $g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ の偏導関数 $g_u(u,v)$, $g_v(u,v)$ をそれぞれ求めよ.

(1)　$f(x,y) = y^x$,　$\varphi(u,v) = \dfrac{v}{u}$,　$\psi(u,v) = u^2 + v^2$

(2)　$f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,　$\varphi(u,v) = u\cos v$,　$\psi(u,v) = u \sin v$

$\boxed{4}$ 次の変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$,　$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}$ を求めよ.

(1)　$x = u^3 + 3v^2$，$y = v^3 + 3u^2$　　　(2)　$x = r\cos^3 t$，$y = r \sin^3 t$

$\boxed{5}$ 次の曲面の，与えられた点における接平面と法線の方程式を求めよ．

(1)　$z = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{x}{y}$　　$(1,1,3)$　　　(2)　$z = \log(2x^2 - y - 6)$　　$(2,1,0)$

$\boxed{6}$ 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，3 種類の極限値

(a)　$\displaystyle\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Bigr)$　　　(b)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Bigr)$　　　(c)　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

がそれぞれ存在するか否かを調べよ．つまり，存在すれば，その値を計算し，そうでなければ，その理由を述べよ．

(1)　$f(x,y) = \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$　　　(2)　$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(3)　$f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　　(4)　$f(x,y) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$