数学演習第二 第 5 回 「一次独立・一次従属，基底と次元」 解答例 (2019.11.6 実施)

［注意］: 以下の解答例では，列ベクトルの組に対して，与えられたベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ とかくことにする．

$\boxed{1}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $-7\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$. (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $-\dfrac{7}{6}\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$. 分母を払って $7\boldsymbol{a}_1 + 6\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - 6\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ でも可．(3) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -10 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_3 - 10\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$. (4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立．

$\boxed{2}$ (1)(i) $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = c_1(\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3) + c_2(\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3) + c_3(3\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3) = (c_1 + c_2 + 3c_3)\boldsymbol{v}_1 + (5c_1 + 7c_2 + 7c_3)\boldsymbol{v}_2 + (-2c_1 - 3c_2 - 2c_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立だから，$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ 5c_1 + 7c_2 + 7c_3 = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$. これは，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$.

$\boxed{1}$(1) からこの連立一次方程式の係数行列を簡約化すると，$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. 従って，例えば $k = 1$ とすれば，$-7\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が得られるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属．(ii) (i) と同様に，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. $\boxed{1}$(4) からこの連立一次方程式の係数行列を簡約化すると単位行列なので，$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立．

(2) (1) と同様に，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. ここで，$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -9 \\ 0 & 12 & k+10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{10} \\ 0 & 1 & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & k - \frac{8}{10} \end{bmatrix}$ である．よって，$k - \dfrac{4}{5} = 0$，つまり $k = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{9}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$ となるので，例えば $t = 1$ とすれば，$\dfrac{7}{10}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{9}{10}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が成り立つ.（分母を払って，$7\boldsymbol{a}_1 - 9\boldsymbol{a}_2 + 10\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ でも可.）従って $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属．$k \neq \dfrac{4}{5}$ のとき，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立．

$\boxed{3}$ $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & a \\ 0 & -2 & b \\ 2 & 1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a \\ 0 & -2 & b \\ 0 & 1 & c+2a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & c+2a \\ 0 & 0 & 4a+b+2c \end{array}\right]$ から，$\mathcal{E}_1$ の 2 つの列ベクトルは一次独立だが，$4a + 2b + 2c \neq 0$ となる $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を一次結合で表すことができないので，$\mathbb{R}^3$ を生成しない．$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-b+c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b-c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+b+c}{2} \end{array}\right]$ より，$\mathcal{E}_2$ の 3 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立で，全ての $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を含むから $\mathbb{R}^3$ の基底．$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -b \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right]$ より，$\mathcal{E}_3$ の 3 つの列ベクトルは一次従属で，$a - b + c \neq 0$ となる $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を一次結合で表すことが

できないので，$\mathbb{R}^3$ を生成しない．$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&a\\3&3&2&b\\5&4&2&c\end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{2a-8b+5c}{3}\\0&1&0&\frac{-4a+13b-7c}{3}\\0&0&1&a-2b+c\end{array}\right]$ より $\mathcal{E}_4$ の 3 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次独立で，全ての $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を含むから $\mathbb{R}^3$ の基底．$\mathcal{E}_5$ も同じようにやってもよいが，$\boxed{1}$(2) で見たように $\mathcal{E}_5$ の 4 つの列ベクトルは一次従属．また $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ は一次独立なので，$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&a\\1&3&4&b\\-1&4&3&c\end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{-7a+10b-4c}{7}\\0&1&0&-a+b\\0&0&1&\frac{7a-6b+c}{7}\end{array}\right]$ となって，全ての $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を含むから，$\mathcal{E}_5$ の 4 つの列ベクトルは $\mathbb{R}^3$ を生成する．まとめると，(i) $\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_5$．(ii) $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_4$．(iii) $\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_4$．

［注意］：$\mathbb{R}^n$ の基底は n 個の一次独立な n 項列ベクトルからなる．$(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になるかどうかは**教科書 命題 7.14** にあるように $[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n]$ が正則行列であるか（行列式が 0 でないか）調べるのが簡単である．行列式の値を調べると，$\mathcal{E}_2$ は 2，$\mathcal{E}_3$ は 0，$\mathcal{E}_4$ は -3 になるので，$\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_4$ が $\mathbb{R}^3$ の基底となる．

$\boxed{4}$ W_1 の元は，$\begin{bmatrix}x\\-2x+4z\\z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix}$ $(x,z\in\mathbb{R})$ と表せるので，$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\\1\end{bmatrix} \right\rangle$．この 2 つの列ベクトルは一次独立であることがチェックできるので，W_1 の基底を与え，$\dim W_1 = 2$．W_2 は，$\boxed{3}$ で求めたように，$\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ だから，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は一次独立で，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式がある．従って，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の一次結合は，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるから，$W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\rangle$．よって $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ が基底で，$\dim W_2 = 2$．$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&4\\-1&-3&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\dim W_3 = 1$ で $\left(\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\right)$ が基底．第 3 回 $\boxed{1}$(10) で見たように，$W_4 = \left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 5a-2b+c=0\right\}$ である．W_1 と同様に，$\dim W_4 = 2$ で，$\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)$ が基底の一例．［注意］：一般に，$m\times n$ 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n]$ に対し，$\{\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つ $\} \subset \mathbb{R}^m$ は，第 7 回で見る A の列空間 $C(A) = \langle \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\rangle$ に一致することが示せる．これを使えば，W_3 でみた簡約化の計算から $\dim W_4 = 2$ と基底の一例 $\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}\right)$ が得られる．

$\boxed{5}$ (1) $\begin{bmatrix}3&0&4&1\\1&-2&2&1\\0&3&-1&3\\2&2&2&2\end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix}1&0&\frac{4}{3}&0\\0&1&-\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3+c_4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}-4\\1\\3\\0\end{bmatrix}$ $(k\in\mathbb{R})$．よって $-4\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$．(2) 上の簡約行列から，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次従属なので，$\mathcal{E}$ は基底にならない．$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ は一次独立で，$\boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるので，$W = \langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4\rangle$．よって $\mathcal{F}$ は基底．また，簡約行列の $1,3,4$ 列に注目すると階数 3 だから，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ は一次独立で，$\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せるから，$W = \langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\rangle$．よって $\mathcal{G}$ も基底．同様に，$\mathcal{H}$ も基底．

(3) (i) $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ が一次独立であること．$\begin{bmatrix}4&7&1\\0&5&-3\\0&0&-3\\3&4&0\end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ よりわかる．(ii) $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3 \in W$ であること．

$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4|\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc}3&0&4&1&4&7&1\\1&-2&2&1&0&5&-3\\0&3&-1&3&0&0&-3\\2&2&2&2&3&4&0\end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|ccc}1&-2&2&1&0&5&-3\\0&3&-1&3&0&0&3\\0&0&0&1&-\frac{1}{2}&1&-2\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$ よりわかる．(2) から $\dim W = 3$ とわかっていたので，**教科書 命題 18.8** に注意すれば，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ が W を生成することも言えて，$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ は W の基底とわかる．［注意］：W を生成することは，$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4]$ を簡約化して $\boldsymbol{a}_i$ が $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の一次結合で表せることを直接示してもよい．