数学演習第二　第5回　「一次独立・一次従属，基底と次元」

(2019.11.6 実施)

【要点】 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ に対して，

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \text{が一次独立} \\
\Leftrightarrow \quad & c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \text{ となる } c_1, \ldots, c_k \text{は } c_1 = \cdots = c_k = 0 \text{ に限る．} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{同次連立一次方程式 } (*)\ [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \text{ が自明な解のみを持つ．} \\
\overset{\textbf{教科書 定理 8.8(i)}}{\Leftrightarrow} \quad & \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k] = k
\end{aligned}
$$

なお，一次従属の場合に非自明な一次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を求めたければ，$[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k]$ の簡約行列から $(*)$ の解 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を読み取ればよい．

---

1 ［**数ベクトルの一次独立性の判定と非自明な一次関係式**］　次のベクトルが一次独立かどうか判定し，一次従属の場合には，非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2 ［**一次独立性**］　ベクトル空間 V に属する 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が一次独立であるとする．

(1) V 中の次のベクトルの組は一次独立かどうか判定せよ．一次従属の場合には，非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(i) $(\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3)$

(ii) $(\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_4, \quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4, \quad \boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4)$

(2) V 中の次のベクトルの組が一次従属となるような定数 k を求め，そのときの非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

$$(\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 5\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_2 = -4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{a}_3 = -5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_3)$$

【**要点**】 ベクトル空間 V の元の組 $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が次の 2 つの条件

(i) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する．すなわち，$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.

(ii) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立である．

を共に満たすとき，$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ は，V の**基底**であるという．基底の取り方は一意的ではないが,（有限個の元から生成されている）ベクトル空間の基底をなす元の個数はただ一つに定まる．この値をベクトル空間 V の**次元**という．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ［**数ベクトル空間の基底と次元**］ 次のベクトルの組 $\mathcal{E}_1$〜$\mathcal{E}_5$ のうち，次の条件 (i),(ii),(iii) を満たしているものをそれぞれすべて答えよ．

(i) $\mathbb{R}^3$ を生成する．　(ii) 一次独立なベクトルの組である．　(iii) $\mathbb{R}^3$ の基底である．

$$\mathcal{E}_1 : \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \mathcal{E}_2 : \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \qquad \mathcal{E}_3 : \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathcal{E}_4 : \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \qquad \mathcal{E}_5 : \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ ［**部分空間の基底と次元**］ 次の 4 つの $\mathbb{R}^3$ の部分空間の基底と次元を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + y - 4z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = 0 \\ 2x + \ \ y + 4z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 0 \end{array} \right\}, \quad W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{連立一次方程式} \\ \left\{ \begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = a \\ 2x + \ \ y + 4z = b \\ -x - 3y + 3z = c \end{array} \right. \\ \hfill \text{が解を持つ.} \end{array} \right\}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ ［**部分空間の基底**］ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W を次で定義する．

$$W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間に成り立つ非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(2) 次のうち，W の基底となっているものをすべて選べ．

$$\mathcal{E} : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \quad \mathcal{F} : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathcal{G} : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathcal{H} : (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$$

(3) $\left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ は W の基底であることを示せ．