

2019年11月13日実施

1 次の2変数関数のマクローリン展開の公式を利用する：

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}\{f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\} + \frac{1}{3!}\{f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3\} + \dots \quad (a)$$

(1) $f(x, y) = \cos(x + y^2)$ より,

$$\begin{aligned} f_x &= -\sin(x + y^2), f_y = -2y \sin(x + y^2), \\ f_{xx} &= -\cos(x + y^2), f_{xy} = -2y \cos(x + y^2), f_{yy} = -4y^2 \cos(x + y^2) - 2 \sin(x + y^2), \\ f_{xxx} &= \sin(x + y^2), f_{xxy} = 2y \sin(x + y^2), f_{xyy} = 4y^2 \sin(x + y^2) - 2 \cos(x + y^2), \\ f_{yyy} &= 8y^3 \sin(x + y^2) - 12y \cos(x + y^2). \end{aligned}$$

点 $(0, 0)$ での値を (a) に代入して,

$$\cos(x + y^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - xy^2 + \dots$$

【別解】 1変数のマクローリン展開の公式

$$g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \dots$$

を利用する. ここでは, 特に $n = 2, t = x + y^2, g(t) = \cos t$ として適用し, 2変数多項式として4次以上の項を無視して展開し, 昇べきの順に並べると

$$\cos(x + y^2) = \cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}(x + y^2)^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}x^2 - xy^2 + \dots$$

(2) (a) の展開式を利用するのもよいか, $f(x, y) = a^{x+2y} = e^{(x+2y)\log a}$ より, 指数関数のマクローリン展開

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots$$

を用いる方が易しい. つまり, $t = (\log a)(x + 2y)$ を代入すると

$$a^{x+2y} = 1 + (\log a)(x + 2y) + \frac{(\log a)^2}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2) + \frac{(\log a)^3}{6}(x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3) + \dots$$

因みに, f の3次までの偏導関数は次の通りである：

$$\begin{aligned} f_x &= (\log a)a^{x+2y}, f_y = 2(\log a)a^{x+2y}, f_{xx} = (\log a)^2 a^{x+2y}, f_{xy} = 2(\log a)^2 a^{x+2y}, f_{yy} = 4(\log a)^2 a^{x+2y}, \\ f_{xxx} &= (\log a)^3 a^{x+2y}, f_{xxy} = 2(\log a)^3 a^{x+2y}, f_{xyy} = 4(\log a)^3 a^{x+2y}, f_{yyy} = 8(\log a)^3 a^{x+2y}. \end{aligned}$$

(3) (2) と同様に, ここでも (a) を使うよりも, 対数関数のマクローリン展開

$$\log(x + 1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

を用いる方が簡単になる. すなわち,

$$y \log(x + 1) = y \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \dots \right) = xy - \frac{1}{2}x^2y + \dots$$

因みに, f の3次までの偏導関数は次の通りである：

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{y}{x+1}, f_y = \log(x+1), f_{xx} = \frac{-y}{(x+1)^2}, f_{xy} = \frac{1}{x+1}, f_{yy} = 0, \\ f_{xxx} &= \frac{2y}{(x+1)^3}, f_{xxy} = \frac{-1}{(x+1)^2}, f_{xyy} = f_{yyy} = 0. \end{aligned}$$

【参考】 x, y の n 次多項式 $P(x, y)$ が $f(x, y)$ の n 次のマクローリン展開であることと

$$f(x, y) = P(x, y) + o((\sqrt{x^2 + y^2})^n) \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)) \quad (b)$$

が成り立つことは同値である. この事実は, (a) で定義された $f(x, y)$ の n 次マクローリン展開が, (a) を使わなくても, (b) をみただけで n 次多項式 $P(x, y)$ を見つけられれば, $P(x, y)$ が $f(x, y)$ の n 次マクローリン展開となることを示している. これより上述のような (a) を用いないマクローリン展開の導出が許される.

(2) は $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $D(0,0) = 0$ となる問題である。ここで

$$D(a,b) := f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2$$

とおいた。極値の定義が以下のように与えられることに注意して、 $f(0,0)$ が極値かどうか判定する。

$f(a,b)$ が極大値 (または極小値) であるとは、 (a,b) に十分近い (a,b) 以外の全ての点で、不等式 $f(x,y) < f(a,b)$ (または $f(x,y) > f(a,b)$) が成り立つときをいう。【注】 この定義において、 $<$ ($>$) を \leq (\geq) で置き換えて、広義の極大値 (広義の極小値) を定義することができる。

- (1) $f(x,y) = \cos x + \cos y + 2xy$. $f_x = -\sin x + 2y$, $f_y = -\sin y + 2x$ より, $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. $f_{xx} = -\cos x$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = -\cos y$ より, $D(0,0) = -3 < 0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない。
- (2) $f(x,y) = 4x^2 + 4xy^2 + y^4 = (2x + y^2)^2$. $(x,y) \neq (0,0)$ が $x = -\frac{1}{2}y^2$ を満たすとき $f(x,y) = 0 = f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない。

以下の極値を取るための十分条件を利用する $f(x,y)$ が (a,b) の近くで、連続な 2 階偏導関数を持ち、

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とする。さらに、 $D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2$ とおくとき、

- (i) $D(a,b) > 0$ のとき, $\begin{cases} f_{xx}(a,b) > 0 \implies f(a,b) \text{ は極小値,} \\ f_{xx}(a,b) < 0 \implies f(a,b) \text{ は極大値.} \end{cases}$ (極値を取るための十分条件)
- (ii) $D(a,b) < 0$ のとき, $f(a,b)$ は極値でない。
- (iii) $D(a,b) = 0$ のとき, 極値を取るか取らないかのいずれか一方であるが, この方法では判定できない。(2 参照)

- (1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - 4y$. $\begin{cases} f_x = 2x - y - 1 = 0 \\ f_y = -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = (2,3)$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -1$, $f_{yy} = 2$ より, $D(2,3) = f_{xx}(2,3)f_{yy}(2,3) - f_{xy}(2,3)^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$. よって, $f(x,y)$ は $(2,3)$ で極小値 $f(2,3) = -7$ を取る。
- (2) $f(x,y) = x^4 - 2x^3 + x^2 + y^2$. $\begin{cases} f_x = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 2x(x-1)(2x-1) = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{cases}$ より $(x,y) = (0,0), (1,0), (1/2,0)$ (この 3 点が極値を与える候補). $f_{xx} = 12x^2 - 12x + 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 4(6x^2 - 6x + 1)$. $D(0,0) = D(1,0) = 4 > 0$, $f_{xx}(0,0) = f_{xx}(1,0) = 2 > 0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0), (1,0)$ で極小値 $f(0,0) = f(1,0) = 0$ を取る。一方, $D(1/2,0) = -2 < 0$ より $f(x,y)$ は $(1/2,0)$ では極値を取らない。
- (3) $f(x,y) = xy(x+y-1)$. $\begin{cases} f_x = y(2x+y-1) = 0 \\ f_y = x(x+2y-1) = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,y) = (0,0), (1,0), (0,1), (1/3,1/3)$ (この 4 点が極値を与える候補). $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x + 2y - 1$, $f_{yy} = 2x$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 4xy - (2x + 2y - 1)^2$. $D(0,0) = D(1,0) = D(0,1) = -1 < 0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0), (1,0), (0,1)$ で極値を取らない。一方 $D(1/3,1/3) = 1/3 > 0$, $f_{xx}(1/3,1/3) = 2/3 > 0$ より, $f(x,y)$ は $(1/3,1/3)$ で極小値 $f(1/3,1/3) = -1/27$ を取る。
- (4) $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2$. $\begin{cases} f_x = 3x^2 + 4x + y = 0 \\ f_y = x + 2y = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,y) = (0,0), (-7/6, 7/12)$ (この 2 点が極値を与える候補). $f_{xx} = 6x + 4$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 12x + 7$. $D(0,0) = 7 > 0$, $f_{xx}(0,0) = 4 > 0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ を取る。一方, $D(-7/6, 7/12) = -7 < 0$, より, $f(x,y)$ は $(-7/6, 7/12)$ で極値を取らない。
- (5) $f(x,y) = \sin x \sin y$. $\begin{cases} f_x = \cos x \sin y = 0 \\ f_y = \sin x \cos y = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx} = -\sin x \sin y$, $f_{xy} = \cos x \cos y$, $f_{yy} = -\sin x \sin y$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = \sin^2 x \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y$. $D(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1 > 0$, $f_{xx}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -1 < 0$ より, $f(x,y)$ は点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で極大値 $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$ を取る。
- (6) $f(x,y) = y \tan^{-1} x$. $\begin{cases} f_x = \frac{y}{x^2+1} = 0 \\ f_y = \tan^{-1} x = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,y) = (0,0)$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx} = -\frac{2xy}{(x^2+1)^2}$, $f_{xy} = \frac{1}{x^2+1}$, $f_{yy} = 0$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = -\frac{1}{(x^2+1)^2}$. $D(0,0) = -1 < 0$ より, $f(x,y)$ は極値を取らない。
- (7) $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 2y + 1$. $\begin{cases} f_x = 2x - 4y = 0 \\ f_y = -4x + 10y - 2 = 0 \end{cases}$ を解いて $(x,y) = (2,1)$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 10$ より, $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 4 > 0$. $f_{xx}(x,y) = 2 > 0$ より, $f(x,y)$ は点 $(2,1)$ で極小値 $f(2,1) = 0$ を取る。