数学演習第二 第 7 回 「座標，行列の零空間・列空間・行空間」 解答例 (2019.11.20 実施)

$\boxed{1}$ (1) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$ だから，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$ を求めるために，$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1$ を解く．$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|\boldsymbol{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c}0&1&1&1\\-1&0&1&3\\1&-1&0&5\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-3\\0&1&1&1\\0&-1&1&8\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-3\\0&1&1&1\\0&0&2&9\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{7}{2}\\0&0&1&\frac{9}{2}\end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{2}(3\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_3)$．よって，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\-7\\9\end{bmatrix}$．$\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$ を掛けてもよい．(2) 条件から，$\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}q+r\\-p+r\\p-q\end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるために，$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}q+r\\-p+r\\p-q\end{bmatrix}$ を解く．$[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3|\boldsymbol{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&q+r\\3&3&2&-p+r\\5&4&2&p-q\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&q+r\\0&-3&-7&-p-3q-2r\\0&-6&-13&p-6q-5r\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&q+r\\0&3&7&p+3q+2r\\0&0&1&3p-r\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-9p+q+4r\\0&3&0&-20p+3q+9r\\0&0&1&3p-r\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{13}{3}p-q-2r\\0&1&0&-\frac{20}{3}p+q+3r\\0&0&1&3p-r\end{array}\right]$．よって，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\frac{13}{3}p-q-2r\\-\frac{20}{3}p+q+3r\\3p-r\end{bmatrix}$．$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&3&2\\5&4&2\end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-8&5\\-4&13&-7\\3&-6&3\end{bmatrix}$ を掛けてもよい．

$\boxed{2}$ $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_i$ $(i=1,2)$ を解く．$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2|\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc}2&1&4&-7\\1&4&-5&7\\-2&1&-8&13\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc}1&4&-5&7\\0&-7&14&-21\\0&9&-18&27\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-5\\0&1&-2&3\\0&0&0&0\end{array}\right]$．ここから，$\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{b}_2 = -5\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$ がわかる．従って，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるので W に属する．さらに，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}$．

$\boxed{3}$ (1) $[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix}1&2&3\\-5&-3&-1\\-1&0&1\\-5&1&7\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&4\\0&-3&-6\\0&1&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\dim W_2 = 2$ で，基底の一例は $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$．

$\begin{bmatrix}2&3&3&-3\\-1&-2&-1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&1&-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&3&-3\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$ より，$\dim W_3 = 2$ で，基底の一例は $\left(\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}-3\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}3\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$．

(2) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は一次独立だから，$\dim W_1 = 2$．さらに，

$$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-5&-3\\1&-1&-1&0\\2&0&-5&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&-5&-3\\0&0&-2&-2\\0&2&-7&-3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-4&-1\\0&1&-5&-3\\0&0&1&1\\0&0&3&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

より，$\dim(W_1+W_2) = \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2] = 3$ であり，基底の一例は，$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)$．共通部分と和の次元公式から，$\dim(W_1\cap W_2) = 2+2-3 = 1$．上の簡約行列から，$-3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が読み取れる．これは，$3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\6\end{bmatrix}$ を意味する．左辺は W_1 に，中辺は W_2 に属するから，この元は共通部分 $W_1\cap W_2$ に属す．$\dim(W_1\cap W_2) = 1$ だから，$\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\6\end{bmatrix}\right)$ が $W_1\cap W_2$ の基底．[注意]：$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}c_1-c_2\\c_2\\c_1-c_2\\2c_1\end{bmatrix} \in W_2 = \langle \boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\rangle$ となる c_1,c_2 の条件を求める方法でもできる．

(3) $\dim W_1 = \dim W_3 = 2$．

$$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix}1&-1&-3&3\\0&1&1&-1\\1&-1&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1&-3&3\\0&1&1&-1\\0&0&4&-3\\0&2&6&-5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-2&2\\0&1&1&-1\\0&0&4&-3\\0&0&4&-3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{3}{4}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

より，$\dim(W_1+W_3) = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2] = 3$ であり，基底の一例は，$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{x}_1)$. . 共通部分と和の次元公式から，$\dim(W_1\cap W_3)=2+2-3=1$. 上の簡約行列から，$-2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{x}_1+4\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が読み取れる．これは，$2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2=3\boldsymbol{x}_1+4\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\3\\4\end{bmatrix}$ を意味する．左辺は W_1 に，中辺は W_3 に属するから，この元は共通部分 $W_1\cap W_3$ に属す．$\dim(W_1\cap W_3)=1$ だから，$\left(\begin{bmatrix}3\\-1\\3\\4\end{bmatrix}\right)$ が $W_1\cap W_3$ の基底. [注意]：$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}c_1-c_2\\c_2\\c_1-c_2\\2c_1\end{bmatrix}$ を W_3 の条件にある連立一次方程式に代入して，c_1,c_2 の満たす条件を求める方法でもできる．

(4) $\dim W_3=2, \dim W_4=3$. さらに，$W_3\cap W_4=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l}2x_1+3x_2+3x_3-3x_4=0\\-x_1-2x_2-x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-4x_3+x_4=0\end{array}\right\}$ だから，$\begin{bmatrix}2&3&3&-3\\-1&-2&-1&1\\2&1&-4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&-1&1&-1\\0&-3&-6&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&-3\\0&1&-1&1\\0&0&-9&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ より，$\dim(W_1\cap W_2)=1$ で，基底の一例は $\left(\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$. $\dim W_3=2,\dim W_4=3$ より，共通部分と和に関する次元公式から，$\dim(W_3+W_4)=2+3-1=4$. $\dim\mathbb{R}^4=4$ だから，$W_3+W_4=\mathbb{R}^4$.
[注意]：W_4 の基底を求めて (2),(3) と同じ方法で考えてもよい．

$\boxed{4}$ 行列 A の零空間，行空間，列空間の基底は A の簡約行列をもとに考える．零空間 $N(A)$ の次元は A の列数 $-\,\mathrm{rank}\,A$ であり，基底は，同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解を選べばよい．$\dim C(A)=\mathrm{rank}\,A$ であり，列空間の基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列 A の列を取ればよい．$\dim R(A)=\mathrm{rank}\,A$ であり，行基本変形で行空間は変わらないので，簡約行列の 1 行目から $\mathrm{rank}\,A$ 行目までを取ればよい．

まず M について考える．$M=\begin{bmatrix}3&-5&-1&-3&-9\\1&0&3&1&2\\2&-1&4&1&1\\1&-1&1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&-1\\0&-2&-4&0&-6\\0&1&2&2&3\\0&1&2&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&-1&2\\0&1&2&0&3\\0&0&0&2&0\\0&0&0&3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\dim N(M)=2$ で基底の一例は，$\left(\begin{bmatrix}-3\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-3\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$. $\dim C(M)=\mathrm{rank}\,M=3$ で，主成分が $1,2,4$ 列にあることから，基底の一例は M の $1,2,4$ 列 $\left(\begin{bmatrix}3\\1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\0\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$. また，$\dim R(M)=\mathrm{rank}\,M=3$ で，基底の一例は，$([1,0,3,0,2],[0,1,2,0,3],[0,0,0,1,0])$.

次に ${}^tM$ について考える．${}^tM=\begin{bmatrix}3&1&2&1\\-5&0&-1&-1\\-1&3&4&1\\-3&1&1&-1\\-9&2&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&-4&-1\\0&10&14&4\\0&-15&-21&-6\\0&-8&-11&-4\\0&-25&-35&-10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&1&\frac{7}{5}&\frac{2}{5}\\0&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&6\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\dim N({}^tM)=1$ で基底の一例は，$\left(\begin{bmatrix}-1\\-6\\4\\1\end{bmatrix}\right)$. $\dim C({}^tM)=\mathrm{rank}\,{}^tM=3$ で，主成分が $1,2,3$ 列にあることから，基底の一例は ${}^tM$ の $1,2,3$ 列 $\left(\begin{bmatrix}3\\-5\\-1\\-3\\-9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\4\\1\\1\end{bmatrix}\right)$. また，$\dim R({}^tM)=\mathrm{rank}\,{}^tM=3$ で，基底の一例は，$([1,0,0,1],[0,1,0,6],[0,0,1,-4])$.
[注意]：$R({}^tM)$ の基底は $C(M)$ の基底の転置，$C({}^tM)$ の基底は $R(M)$ の基底の転置を取っても可.