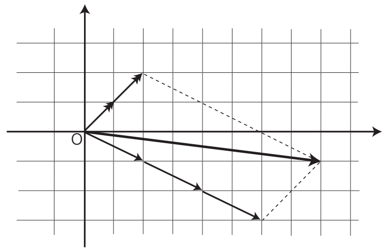
数学演習第二 第 7 回 「座標，行列の零空間・列空間・行空間」

(2019.11.20 実施)

【要点】 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$ がベクトル空間 V の基底であるとき, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{b}_1, \ \ldots, \boldsymbol{b}_r$ の一次結合でただ一通りに表される.

$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ とするとき, 列ベクトル $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する**座標**といい $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ と表す. V が数ベクトル空間（の部分空間）の場合，座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるには, 非同次形連立一次方程式 $[\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$ を解けばよい.



例えば $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ に対し，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ は $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2$ より $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ となる.

---

1 [$\mathbb{R}^3$ **における座標**]

$\mathbb{R}^3$ の自然な基底 $\mathcal{E} = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ と，さらに次の 2 つの基底を考える.

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

(1) $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}}$，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ.

(2) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{E}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}}$ および基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ.

2 [**部分空間における座標**]

$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ を考えると，$\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ は V の基底である．$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ はいずれも V に含まれることを示し，基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$，$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}$ をそれぞれ求めよ.

【要点：共通部分と和空間に関する次元公式（教科書命題 19.10）】
W_1, W_2 を V の部分空間とするとき，次が成り立つ．

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ ［**共通部分と和空間**］ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2, W, U を以下の通りとする．

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \, 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(1) W_2, W_3 の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(2) $W_1 \cap W_2$，$W_1 + W_2$ の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(3) $W_1 \cap W_3$，$W_1 + W_3$ の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(4) $W_3 \cap W_4$，$W_3 + W_4$ の次元と基底をそれぞれ求めよ．

【要点：教科書 19 章】 $m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} = [\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_n]$ に対し，

零空間 $N(A)$ 　同次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^n$ の部分空間．

行空間 $R(A)$ 　n 項行ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$ で生成される $\mathbb{R}_n$ の部分空間．
（ただし，$\mathbb{R}_n$ は，n 項行ベクトル全体のなすベクトル空間を表す.）

列空間 $C(A)$ 　m 項列ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間．

$\boxed{\mathbf{4}}$ ［**行列の零空間・行空間・列空間**］ 行列 $M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ とする．

M および ${}^tM$ の零空間，行空間，列空間の次元と基底をそれぞれ求めよ．