数学演習第二（演習第８回）　【解答例】

微積：偏微分 [3] (陰関数・ラグランジュの未定乗数法)　2019 **年** 12 **月** 4 **日 実施**

1

(1) $\varphi(a)=\boxed{b}$. また, $f(x,\varphi(x))=c$ を x で微分し, $f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$. $\therefore\ \varphi'(x)=\boxed{-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}}$.

(2) $\psi(b)=\boxed{a}$. また, $f(\psi(y),y)=c$ を y で微分し, $f_x(\psi(y),y)\psi'(y)+f_y(\psi(y),y)=0$. $\therefore\ \psi'(y)=\boxed{-\dfrac{f_y(\psi(y),y)}{f_x(\psi(y),y)}}$.

(3) (1) の場合, (a,b) の近傍で $f(x,y)=c$ は $y=\varphi(x)$ と書けるから, (a,b) における接線は $y-b=\varphi'(a)(x-a)$. (1) の結果より $\varphi'(a)=-\dfrac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$ であるから, これを代入し整理して $\boxed{f_x(a,b)}(x-a)+\boxed{f_y(a,b)}(y-b)=0$.
(2) の場合, (a,b) における接線は $x-a=\psi'(b)(y-b)$ と表され, (2) の結果より $\psi'(b)=-\dfrac{f_y(a,b)}{f_x(a,b)}$ であるから, やはり (1) の場合と同じ形の接線の方程式が得られる. $\nabla f(a,b)$ はこの直線の法線ベクトルであるから, $\nabla f(a,b)$ は点 (a,b) において, 曲線 $f(x,y)=c$ と $\boxed{\text{垂直}}$ であることが分かる.

2

$f(x,y)$ が通常扱う “性質のよい関数” (初等関数など) の場合, $f(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) の集合は曲線状の図形を描き, $f_y(x,y)=0$ の表す図形によって何本かの曲線 (その上では $f_y(x,y)\neq 0$) に分割される. その 1 つ 1 つが $f(x,y)=0$ の定める ($y=\varphi(x)$ の形の) 別々の陰関数を表す (下図参照). 以下では, その 1 つずつについて考える.

(1) $f(x,y):=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}=0\ (x>0)$ 上の $f_y(x,y)=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}\neq 0$ を満たす部分で考える.

① $\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}=0\ (y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すれば, $\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\dfrac{xy'-y}{x^2}=0$. 整理して $\boxed{(x+y)-(x-y)y'=0}$. 更に, 微分を繰り返し, $\boxed{1+(y')^2-(x-y)y''=0}$.

② $(1,0)$ の近傍で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ を考え, ① で得られた 2 つの関係式に $(x,y)=(1,\varphi(1))=(1,0)$ を代入し, $\varphi'(1)=1$, $\varphi''(1)=2$. よって, $\varphi(x)=\boxed{(x-1)+(x-1)^2}+\cdots$.

③ ①の第 1 の関係式より $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$ であるから, 極値をとる点の候補は $x+y=0$, $\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}=0$ $(x>0)$ を解いて, $(x,y)=\left(\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt2},-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt2}\right)$. このとき, $\varphi\left(\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt2}\right)=-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt2}$, $\varphi'\left(\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt2}\right)=0$, $\varphi''\left(\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt2}\right)=\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt2}>0$. よって, $y=\varphi(x)$ は $\boxed{x=\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt2}\ \text{で極小値}\ -\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt2}}$ をとる.

【補足】曲線 $f(x,y)=0$ は極座標 (r,θ) を使うと $x>0$ $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ においては $r=e^{\theta}$ (あるいは $\theta=\log r$) と表示される. なお, 極座標で $r=ae^{b\theta}$ ($a>0, b\neq 0$ は定数) と表示される曲線は対数螺線 (あるいはBernoulli（ベルヌーイ）の螺線) と呼ばれる.

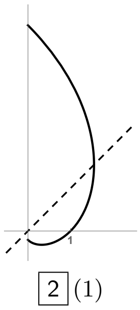
(2) $f(x,y):=2xy-x^3-y^3=0$ 上の, $f_y(x,y)=2x-3y^2\neq 0$ を満たす部分で考える.

① $2xy-x^3-y^3=0\ (y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して, $\boxed{2y-3x^2+(2x-3y^2)y'=0}$. 更に, x での微分して, $\boxed{-6x+4y'-6y(y')^2+(2x-3y^2)y''=0}$.

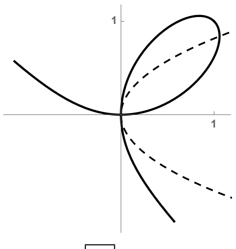
② $(1,1)$ の近傍で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ を考え, ① で得られた 2 つの関係式に $(x,y)=(1,\varphi(1))=(1,1)$ を代入し, $\varphi'(1)=-1$, $\varphi''(1)=-16$. よって, $\varphi(x)=\boxed{1-(x-1)-8(x-1)^2}+\cdots$.

③ ①の第 1 の関係式より $y'=-\dfrac{2y-3x^2}{2x-3y^2}$ であるから, 極値をとる点の候補は $2y-3x^2=0$, $2xy-x^3-y^3=0$ を解いて, $(x,y)=\left(\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3},\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ ($f_y(0,0)=0$ より $(0,0)$ は不適). このとき, $\varphi\left(\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$, $\varphi'\left(\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)=0$, $\varphi''\left(\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)=-3<0$. よって, $y=\varphi(x)$ は $\boxed{x=\dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}\ \text{で極大値}\ \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}}$ をとる.

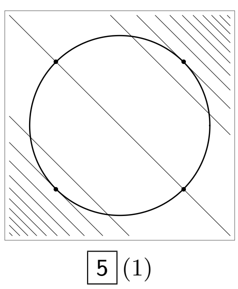
【補足】曲線 $x^3+y^3-3axy=0$ (a は定数) はDecartes（デカルト）の正葉線と呼ばれる. 原点で自己交差し, $x+y+a=0$ が漸近線.

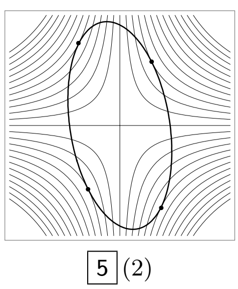


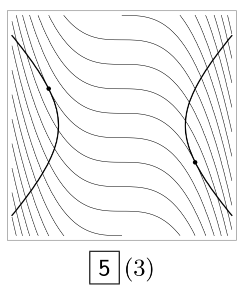
$\boxed{2}$ (1)



$\boxed{2}$ (2)


$\boxed{5}$ (1)


$\boxed{5}$ (2)


$\boxed{5}$ (3)

$\boxed{3}$ (1) $f(x,y,\varphi(x,y))=d$ を x, y で偏微分して,

$$f_x(x,y,\varphi(x,y))+f_z(x,y,\varphi(x,y))\varphi_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y,\varphi(x,y))+f_z(x,y,\varphi(x,y))\varphi_y(x,y)=0$$

が得られる. これより, $\varphi_x(x,y)=-\dfrac{f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$, $\varphi_y(x,y)=-\dfrac{f_y(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$.

(2) (a,b,c) の近傍で曲面 $f(x,y,z)=d$ は $z=\varphi(x,y)$ と表されるから, (a,b,c) における接平面の方程式は $z-c=\varphi_x(a,b)(x-a)+\varphi_y(a,b)(y-b)$ で与えられる. (1) の結果より

$$z-c=-\frac{f_x(a,b,c)}{f_z(a,b,c)}(x-a)-\frac{f_y(a,b,c)}{f_z(a,b,c)}(y-b).$$

となり, これを整理して $f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0$ を得る. (従って, ベクトル $\nabla f(a,b,c):={}^t(f_x(a,b,c),f_y(a,b,c),f_z(a,b,c))$ は点 (a,b,c) において, 曲面 $f(x,y,z)=d$ と垂直である.) 特に, $\nabla f(a,b,c)$ が成分 0 を含まないなら, 法線の方程式は $\dfrac{x-a}{f_x(a,b,c)}=\dfrac{y-b}{f_y(a,b,c)}=\dfrac{z-c}{f_z(a,b,c)}$.

$\boxed{4}$ (1) C^1 級陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在条件は確かに満たされる. $\boxed{1}$ (1) の方法で $\varphi'(x)=\boxed{-\dfrac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}}$.

(2) (1) の結果より, $h'(x)=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=\boxed{f_x(x,\varphi(x))-f_y(x,\varphi(x))\cdot\dfrac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}}$. $h(x)$ は $x=a$ で極値をとるから $h'(a)=f_x(a,b)-f_y(a,b)\cdot\dfrac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}=0$ となり, 示すべき式が従う.

(3) $\alpha=\dfrac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$ とおけば, $\begin{bmatrix}F_x(a,b)\\F_y(a,b)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_x(a,b)\\f_y(a,b)\end{bmatrix}-\alpha\begin{bmatrix}g_x(a,b)\\g_y(a,b)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (最後の等号は, 第 1 成分は (2) の結果, 第 2 成分は α の定義による). また, $F_\lambda(a,b,\alpha)=-g(a,b)=0$.

$\boxed{5}$ $F(x,y)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とおき, $F_x=F_y=F_\lambda=0$ を解いて極値点 (= 極値を与える点) の候補を得る.

(1) $\begin{cases}F_x=3(x+y)^2-2\lambda x=0\\F_y=3(x+y)^2-2\lambda y=0\\-F_\lambda=x^2+y^2-2=0\end{cases}$ の最初の 2 式より, $3(x+y)^2=2\lambda x=2\lambda y$. このとき, $\lambda(x-y)=0$ であるから, $\lambda=0$ または $x=y$. $\lambda=0$ のとき, $x+y=0$ となり, 第 3 式 $g(x,y)=x^2+y^2-2=0$ とから, $(x,y)=(\pm1,\mp1)$. $x=y$ のとき, 第 3 式から, $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ $(\lambda=\pm6)$. よって, 極値点の候補は $(\pm1,\pm1),(\pm1,\mp1)$ の 4 点. 閉曲線 (実は円) $g(x,y)=0$ に沿って $(1,1)\to(-1,1)\to(-1,-1)\to(1,-1)\to(1,1)$ と移動していくと, $f(x,y)=(x+y)^3$ の値は $8\searrow0\searrow-8\nearrow0\nearrow8$ と変化する. よって, $\boxed{\text{点 }(1,1)\text{ で極大値 }8}$, $\boxed{\text{点 }(-1,-1)\text{ で極小値 }-8}$ をとる. (点 $(\pm1,\mp1)$ では極値をとらない.)

(2) $\begin{cases}F_x=y-\lambda(8x+y)=0\\F_y=x-\lambda(x+2y)=0\\-F_\lambda=4x^2+xy+y^2-30=0\end{cases}$ の最初の 2 式より, $\begin{bmatrix}-8\lambda&1-\lambda\\1-\lambda&-2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. $(x,y)=(0,0)$ は第 3 式を満たさないから, $\begin{vmatrix}-8\lambda&1-\lambda\\1-\lambda&-2\lambda\end{vmatrix}=15\lambda^2+2\lambda-1=(3\lambda+1)(5\lambda-1)=0$ でなければならない. $\lambda=-\dfrac{1}{3}$ のとき, $y=-2x$ となり, 第 3 式から $(x,y)=(\pm\sqrt{5},\mp2\sqrt{5})$. $\lambda=\dfrac{1}{5}$ のとき, $y=2x$ となり, 第 3 式から $(x,y)=(\pm\sqrt{3},\pm2\sqrt{3})$. $g(x,y)=0$ が閉曲線 (楕円) ゆえ, $f(\pm\sqrt{5},\mp2\sqrt{5})=-10$, $f(\pm\sqrt{3},\pm2\sqrt{3})=6$ の値を比較して, $\boxed{\text{点 }(\pm\sqrt{5},\mp2\sqrt{5})\text{ で極小値 }-10}$, $\boxed{\text{点 }(\pm\sqrt{3},\pm2\sqrt{3})\text{ で極大値 }6}$ をとることが分かる.

(3) $\begin{cases}F_x=3x^2-2\lambda x=0\\F_y=6+2\lambda y=0\\-F_\lambda=x^2-y^2-3=0\end{cases}$ において, 第 3 式より $x\neq0$ であるから, 第 1 式より $x=2\lambda/3\,(\neq0)$. また, 第 2 式より $y=-3/\lambda$. これらを第 3 式に代入して整理すれば, $4\lambda^4-27\lambda^2-81=(4\lambda^2+9)(\lambda^2-9)=0$. これより, $\lambda=\pm3$ となり, 極値を与える点の候補は $(\pm2,\mp1)$. 一方, $g(x,y)=x^2-y^2-3=0$ の定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とすれば, $x-yy'=0$, $1-(y')^2-yy''=0$ より $\varphi'(x)=\dfrac{x}{\varphi(x)}$, $\varphi''(x)=\dfrac{1-\varphi'(x)^2}{\varphi(x)}$. ここで, $h(x):=f(x,\varphi(x))=x^3+6\varphi(x)$ とおけば, $h'(x)=3x^2+6\varphi'(x)$, $h''(x)=6(x+\varphi''(x))$. 点 $(\pm2,\mp1)$ の近傍で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ (2 点に対応して異なる陰関数が定まる) に対して, $\varphi(\pm2)=\mp1$, $\varphi'(\pm2)=\dfrac{\pm2}{\varphi(\pm2)}=-2$, $\varphi''(\pm2)=\dfrac{1-\varphi'(\pm2)^2}{\varphi(\pm2)}=\pm3$ であるから, $h(\pm2)=\pm8\mp6=\pm2$, $h'(\pm2)=12+6\cdot(\pm2)=0$, $h''(\pm2)=6\cdot(\pm2\pm3)=\pm30\gtrless0$. よって, $\boxed{\text{点 }(2,-1)\text{ で極小値 }2}$, $\boxed{\text{点 }(-2,1)\text{ で極大値 }-2}$ をとる.