数学演習第二 (第 9 回) 線形：線形写像, 核と像 解答例 2019 年 12 月 11 日 実施

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ を任意の $\mathbb{R}^3$ のベクトル, k を任意のスカラーとする.

(1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+(x_3+y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ y_1+y_3 \end{bmatrix} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$,

$f(k\boldsymbol{x}) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1+kx_2 \\ kx_1+kx_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} = kf(\boldsymbol{x})$ が成り立つので f は線形写像である.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となるので f は線形写像ではない.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1^2+2\times 1\times 1-2\times 1^3 = 1$, $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 2^2+2\times 2\times 2-2\times 2^3 = -4 \neq 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ より f は線形写像ではない.

(4) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (x_1+y_1)t^2+2(x_2+y_2)t+(x_3+y_3) = (x_1t^2+2x_2t+x_3)+(y_1t^2+2y_2t+y_3) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$,
$f(k\boldsymbol{x}) = (kx_1)t^2+2(kx_2)t+(kx_3) = k(x_1t^2+2x_2t+x_3) = kf(\boldsymbol{x})$ が成り立つので f は線形写像である.

$\boxed{2}$ (1) 一般のベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ の一次結合で表す. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を c_1, c_2 について解くと $\begin{bmatrix} 3 & 2 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & (3x_1-2x_2)/5 \\ 0 & 1 & (-2x_1+3x_2)/5 \end{bmatrix}$ より $c_1 = \dfrac{3x_1-2x_2}{5}$, $c_2 = \dfrac{-2x_1+3x_2}{5}$ を得るので,

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\frac{3x_1-2x_2}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-2x_1+3x_2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{3x_1-2x_2}{5}f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \frac{-2x_1+3x_2}{5}f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \frac{3x_1-2x_2}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-2x_1+3x_2}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3x_1-2x_2 \\ -2x_1+3x_2 \\ 3x_1-2x_2 \end{bmatrix}$$

(2) 同様に $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解いて, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1-x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \end{bmatrix}$
より $c_1 = x_1-x_2$, $c_2 = x_2-x_3$, $c_3 = x_3$. したがって

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = f\left((x_1-x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (x_2-x_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= (x_1-x_2)f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + (x_2-x_3)f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= (x_1-x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (x_2-x_3)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1-x_2+x_3 \\ x_1-x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ (i) (1), (2) $\mathrm{Ker}(f)$ は, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるようなベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 全体のなす $\mathbb{R}^3$ の部分空間, すなわち連立方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解空間である. A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ なので, その解は, 任意の値をとるパラメータ t を用いて $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される. よって, $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ である. 一方 $\mathrm{Im}(f)$ は, ベクトル

$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 全体のなす $\mathbb{R}^2$ の部分空間である．x_1, x_2, x_3 は任意の値をとることから, $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となるため, $\mathrm{Im}(f)$ の基底は, この 3 つのベクトルの中から一次独立な最大個数の組を選べばよい．ここで, この 3 つのベクトルを列に並べた行列は A に他ならず, A の簡約行列の主成分は 1 列と 2 列にあるので, 3 つのベクトルから 1 番目と 2 番目を選んだ組, すなわち $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を $\mathrm{Im}(f)$ の基底として選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる．
(3) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が 1 対 1 であるためには, $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$, すなわち, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ であることと, f が上への写像であるためには, $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$, すなわち, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = m$ であることが条件となる．よって, f は上への写像 (全射) だが 1 対 1 写像 (単射) ではない．

(ii) (1), (2) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみ, すなわち, $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ で, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ である．同様に $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ で, A の簡約行列の主成分がすべての列にあることから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる．
(3) f は 1 対 1 写像 (単射) であるが上への写像 (全射) でない．

(iii) (1), (2) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は, 任意の値をとるパラメータ t と u を用いて, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される．よって, $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ である．同様に $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり, A の簡約行列の主成分が 1 列目と 2 列目にあることから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる．
(3) この場合は f は 1 対 1 写像 (単射) でなく上への写像 (全射) でもない．

$\boxed{4}$ $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ とおくと,

$$D(p(x)) = 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) - (x+1)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) = (2a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)x - 3a_3x^2 - a_3x^3$$

となるので, $\mathrm{Ker}(D) \ni p(x)$ となるためには, $D(p(x)) = 0$ すなわち, $2a_0 - a_1 = 0,\ a_1 - 2a_2 = 0,\ a_3 = 0$ を満たす必要がある．この連立方程式を解いて, $a_0 = t,\ a_1 = 2t,\ a_2 = t,\ a_3 = 0$ (t は任意), すなわち $p(x) = t(1 + 2x + x^2)$ を得る．よって, $\mathrm{Ker}(D)$ の基底として, $(1 + 2x + x^2)$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 1$.
また, $\mathbb{R}[x]_3$ の基底として, $\{1, x, x^2, x^3\}$ をとると,

$$D(1) = 2, \quad D(x) = -1 + x, \quad D(x^2) = -2x, \quad D(x^3) = -3x^2 - x^3$$

であることから, $\mathrm{Im}(D) = \langle 2, -1 + x, -2x, -3x^2 - x^3 \rangle$. ここで, $-1 + x = -1/2 \times 2 + (-1/2) \times (-2x)$ であることから, $\mathrm{Im}(D)$ の基底として, $(2, -2x, -3x^2 - x^3)$ をとることができて, $\dim(\mathrm{Im}(D)) = 3$. もちろん, $-2x = -1 \times 2 - 2 \times (-1 + x)$ でもあるので, $\mathrm{Im}(D) = \langle 2, -1 + x, -3x^2 - x^3 \rangle$ とも表せて, $\mathrm{Im}(D)$ の基底として, $(2, -1 + x, -3x^2 - x^3)$ でもよい.