

数学演習第二 (第9回)

線形：線形写像, 核と像

2019年12月11日

1 次の写像は線形写像になるか.

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (演習書問題 12.1.1(3))

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (演習書問題 12.1.1(4))

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^3$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

(4) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1t^2 + 2x_2t + x_3$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_2$
($\mathbb{R}[t]_2$ は 2 次以下の実係数多項式全体からなる線形空間)

2 演習書問題 12.1.2(2), (3) 次の問に答えよ.

(1) $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

3 $m \times n$ 行列 A を次のように定めるとき, それぞれの A が決める \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ について以下の問に答えよ.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(1) $\dim(\text{Ker}(f))$ と $\dim(\text{Im}(f))$ を求めよ.

(2) $\dim(\text{Ker}(f)) > 0$ か $\dim(\text{Im}(f)) > 0$ のとき, $\text{Ker}(f)$ と $\text{Im}(f)$ の基底をそれぞれ選べ.

(3) f は上への写像 (全射) であるか, 1 対 1 写像 (単射) であるか.

4 $\mathbb{R}[x]_3$ を 3 次以下の実係数多項式全体からなる線形空間とする.
線形写像 $D: \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_3$ を

$$D(p(x)) = 2p(x) - (x+1)p'(x), \quad (p(x) \in \mathbb{R}[x]_3)$$

と定義するとき, D の核および像の次元および基底を求めよ.