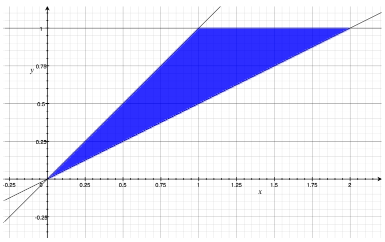
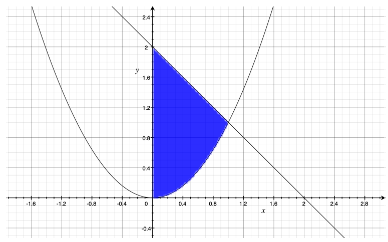
数学演習第二 (第 10 回) 微積：重積分 [1](重積分の定義, 累次積分) [解答例]

2019 年 12 月 18 日 実施

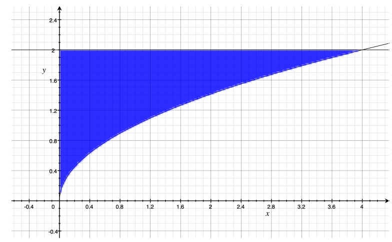
重要 重積分を計算する際は積分領域を正しく把握することが重要. 紙面の都合上, 一部の問題の積分領域しか載せないが, 重積分の問題を解くときには, まずは積分領域を描こう.



1 (1)



2 (1)



2 (2)

1 (1) 積分領域 D は 3 直線 $y = x, y = \frac{1}{2}x, y = 1$ で囲まれた三角形である.

(i) $D : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y$ とみなす.

$$\iint_D x^2 y\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^2 y\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=y}^{x=2y} dy = \int_0^1 \frac{7}{3}y^4\,dy = \frac{7}{3}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{7}{15}.$$

(ii) $y = 1$ を境に左右に分ける. $D_1 : 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{2}x \leq y \leq x$ と $D_2 : 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x \leq y \leq 1$

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{x} x^2 y dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{1} x^2 y dy = \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=x} dx + \int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^4\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx = \left[\frac{3}{40}x^5\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5\right]_1^2 = \frac{7}{15}.$$

(2) $$\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{4}\,dx = \left[\frac{\pi x^3}{12}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

(4) 積分領域 D は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} - x$ と表せる.

$$\iint_D \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(x+y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right) dx = \left[x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(5) 積分領域 D は $0 \leq x \leq 4, \sqrt{x} \leq y \leq 2$ によって囲まれた範囲である.

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 (x+y)\,dy = \int_0^4 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=2} dx = \int_0^4 \left(2x + 2 - x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x + 2 - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{36}{5}.$$

2

(1) 積分領域は $D : 0 \leq y \leq 1,\ x^2 \leq x \leq 2 - x$ である. このとき, $y = 1$ を境に積分領域を分ける. すなわち, $D_1 : 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1$ と $D_2 : 0 \leq x \leq 2 - y,\ 1 \leq y \leq 2$ である. 従って,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

(2) 積分領域は $D: -a \le y \le a, 0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$ である．このとき，積分領域は $D: 0 \le x \le a, -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$ と書き直せる．従って，

$$\int_{-a}^{a} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dx = \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

$\boxed{3}$ (1) x について原始関数を計算することは困難であるが，y については容易に原始関数が求まる．

$$\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx = \frac{3}{8}.$$

(2) y について先に計算しようとすると難しい．従って，積分の順序を入れ替えて積分する事を試みる．積分範囲は $D: 0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le x$ となっている．これを書き直すと，$D: y \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ となる．

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^x e^{\sin^2 y}\cos(2x)\,dy = \int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} e^{\sin^2 y}\cos(2x)dx = \int_0^{\pi} \left[e^{\sin^2 y}\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{x=y}^{x=\pi} dy$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{\sin^2 y}\sin(2y)\,dy = -\frac{1}{2}\left[e^{\sin^2 y}\right]_0^{\pi} = 0.$$

$\boxed{4}$ (1)

切断面	t の範囲	切断面の式	断面積
平面 $x=t$	$0 \le t \le 1$	$\lvert y\rvert \le \sqrt{1-t^2}, 0 \le z \le y^2$	$\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3$
平面 $y=t$	$-1 \le t \le 1$	$0 \le x \le \sqrt{1-t^2}, 0 \le z \le t^2$	$t^2\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$0 \le t \le 1$	$x \ge 0, x^2+y^2 \le 1, \sqrt{t} \le y$	$\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{t} - \sqrt{t(1-t)}$

$$V_1 = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 dt = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \cdot \cos\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\frac{3\cdot 1\cdot \pi}{4\cdot 2\cdot 2} = \frac{\pi}{8}.$$
$$V_1 = \int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt = 2\int^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta) = \frac{\pi}{8}.$$

(2)

切断面	t の範囲	切断面の式	断面積
平面 $x=t$	$-1 \le t \le 1$	$\lvert y\rvert \le \sqrt{1-t^2}, y^2+z^2 \le 1$	$\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert + 2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $y=t$	$-1 \le t \le 1$	$\lvert x\rvert \le \sqrt{1-t^2}, x^2+z^2 \le 1$	$\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert + 2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$-1 \le t \le 1$	$\lvert x\rvert \le \sqrt{1-t^2}, \lvert y\rvert \le \sqrt{1-t^2}$	$4(1-t^2)$

$$V_2 = \int_{-1}^1 4\left(1-t^2\right) dt = 4\cdot 2\int_0^1 (1-t^2)\,dt = 8\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{16}{3}.$$