数学演習第二 第11回 (2020.1.8 実施)

線形写像の表現行列・基底変換行列・表現行列と座標

1

(1) 次で与えられる $\mathbb{R}^2$ の 2 つの基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ について，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \qquad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y + z = 0 \right\}$ の 2 つの基底を考える．

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \qquad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

(i) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{x} \in W$ の $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ が $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ のとき，$\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}}$ を a, b で表せ．

2

$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{B}$ を考える．

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$$

また，$\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathcal{E}_3$，$\mathbb{R}^2$ の標準基底を $\mathcal{E}_2$ とおく．

(1) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ で定義する．次の 4 つの場合について，与えられた $\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}^2$ の基底に関する f の表現行列を求めよ．

(i) $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)$　　(ii) $(\mathcal{A}, \mathcal{E}_2)$　　(iii) $(\mathcal{E}_3, \mathcal{B})$　　(iv) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

(2) 線形写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に関する表現行列が $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ であるとする．

(i) 座標 $[g(\boldsymbol{a}_1)]_{\mathcal{B}}, [g(\boldsymbol{a}_2)]_{\mathcal{B}}, [g(\boldsymbol{a}_3)]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ．

(ii) $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)$ に関する g の表現行列を求めよ．

(3) 次で定義される線形写像 $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を考える．

$$h(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(i) h の $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に関する表現行列を求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ の別の基底 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を取る．

$$\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{G} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

(ii) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{F}$ への基底変換行列を求めよ．

(iii) $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ に関する h の表現行列を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対し $W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ とおいて, $\mathbb{R}^3$ から W への正射影を考える. すなわち, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\boldsymbol{y} \in W$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}_1) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}_2) = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ によって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ と表されるとき, $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ の W への正射影と呼び, $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ への対応を考える.

このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ とするとき, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ が上の条件を満たすような c_1, c_2 を求めよ.

(2) 上の $\boldsymbol{y}$ を W のベクトルとして, $f_1 : \mathbb{R}^3 \to W$ を $f_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ と定義するとき, f_1 の $(\mathcal{E}_3, \mathcal{A})$ に関する表現行列を求めよ. ここで, $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ とする.

(3) 上の $\boldsymbol{y}$ を $\mathbb{R}^3$ のベクトルとして, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ と定義するとき, f_2 の $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3)$ に関する表現行列を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 次以下の実数係数 1 変数多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ とかく. 線形変換 $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を次で定義する.

$$L(p(x)) = 2p(x) - (x+1)p'(x) \quad (p(x) \in \mathbb{R}[x]_2)$$

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ に関する L の表現行列 A を求めよ.

(2) A を用いて $\operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L$ の基底をそれぞれ一組求めよ.

(3) $\mathbb{R}[x]_2$ の別の基底 $\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, x^2)$ に関する L の表現行列を求めよ.

要点（教科書『線形代数学講義』p.155, 定義 23.9, 命題 23.12）

V, W がベクトル空間で, $f : V \to W$ が線形写像であるとする.

V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \mathcal{A}' = (\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n)$ と W の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m), \mathcal{B}' = (\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_m)$ を考える. **$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する f の表現行列**とは,

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)A$$

を満たす $m \times n$ 行列 A のことをいう. **$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換行列**とは,

$$(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P$$

を満たす $n \times n$ 行列 P のことをいう. $\mathcal{A}'$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列は P^{-1} である. さらに, $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列を Q とするとき, $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ に関する f の表現行列は, 上の記号を用いて, $Q^{-1}AP$ と表される.