2019 年度 数学演習第二　演習第 12 回　微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）　解答例

2020 年 1 月 15 日 実施分

$\boxed{1}$ (1) $u = x + 2y,\, v = x - 3y$ とおくと，$x = \dfrac{3u+2v}{5},\, y = \dfrac{u-v}{5}$ だから，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}$$

となる．このとき, 積分領域 D は $E = \{(u,v) \,|\, |u| \leqq 2, |v| \leqq 1\}$ に移る．よって,

$$I_1 = \int_{-2}^{2} du \int_{-1}^{1} u^2 v^4 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv = \frac{1}{5} \int_{-2}^{2} u^2 du \int_{-1}^{1} v^4\, dv = \frac{32}{75}$$

(2) $u = 2x+3y,\, v = 3x+2y$ とおくと，$x = -\dfrac{2u-3v}{5},\, y = \dfrac{3u-2v}{5}$ より $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/5 & 3/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{5}$ で，

積分領域 D は $E = \{(u,v) \,|\, 0 \leqq u \leqq \pi/3, \pi/6 \leqq v \leqq \pi/2\}$ に移る．よって

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} du \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{\cos^2 u} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 u} du \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv = \frac{3}{10}$$

(3) $u = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b},\, v = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ とおくと, $x = \dfrac{a(u-v)}{2},\, y = \dfrac{b(u+v)}{2}$ より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a/2 & -a/2 \\ b/2 & b/2 \end{vmatrix} = \dfrac{ab}{2}$ で, 積分領域 D は $E = \{(u,v) \,|\, -u \leqq v \leqq u,\ 0 \leqq u \leqq 1\}$ に移る．よって, この変換によって

$$I_3 = \frac{\sqrt{ab}}{2} \int_0^1 du \int_{-u}^{u} \sqrt{(u-v)(u+v)} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \int_0^1 du \underline{\int_0^u \sqrt{u^2 - v^2}\, dv}$$

となる．ここで, 下線部が「半径 u の四分円の面積」であることに注意すると,

$$I_3 = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \int_0^1 \frac{\pi u^2}{4} du = \frac{(ab)^{3/2}}{2} \frac{\pi}{4 \cdot 3} = \frac{(ab)^{3/2}}{24} \pi$$

が得られる．あるいは, 微積分の教科書 p.60 の公式を復習して, 次のようにも計算できる．

$$I_3 = \frac{(ab)^{3/2}}{4} \int_0^1 \left[v\sqrt{u^2 - v^2} + u^2 \operatorname{Sin}^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \right]_{v=0}^{v=u} du = \frac{(ab)^{3/2}}{4} \operatorname{Sin}^{-1}(1) \int_0^1 u^2 du = \frac{(ab)^{3/2}}{24} \pi$$

(4) $u = \sqrt{\dfrac{x}{a}},\, v = \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ とおくと，$x = au^2,\, y = bv^2$ より，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2au & 0 \\ 0 & 2bv \end{vmatrix} = 4abuv$ で，積分領域 D は $E = \{(u,v) \,|\, 0 \leqq v \leqq 1-u, 0 \leqq u \leqq 1\}$ に移る．よって

$$I_4 = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (au^2)(bv^2) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv = 4a^2b^2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} u^3 v^3\, dv = a^2b^2 \int_0^1 u^3 (1-u)^4\, du = \frac{a^2b^2}{280}$$

$\boxed{2}$ (1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta$ のヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$ である．この変換によって, 積分領域 D は長方形 $E = \{(r,\theta) \,|\, 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ に移る．よって,

$$J_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a 2r^2 \cos^2\theta + 3r^2 \sin^2\theta \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr = \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} 2 + \sin^2\theta d\theta = \frac{5\pi}{4} a^4$$

(2) 積分領域 D が楕円の内部であることに注意して, $x = ar\cos\theta,\, y = br\sin\theta$ と極座標変換を少し工夫しよう．ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$ で, D は $E = \{(r,\theta) \,|\, 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ に移る．

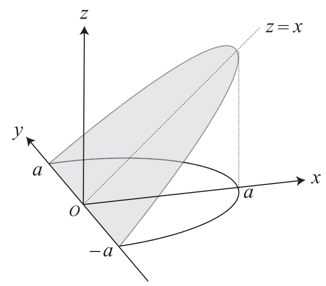
$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (ar\cos\theta + br\sin\theta)^2 abr\, d\theta = ab \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{ab}{8} \int_0^{2\pi} \{(a^2 - b^2)\cos 2\theta + 2ab\sin 2\theta + a^2 + b^2\}\, d\theta = \frac{ab(a^2+b^2)\pi}{4} \end{aligned}$$

(3) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を施すと, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ で, 積分領域 D は $E = \left\{(r,\theta)\,|\, a \leqq r \leqq b,\ \dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{4}\right\}$ に移る. したがって,

$$J_3 = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_a^b r^3 e^{r^2}\, dr = \frac{\pi}{2}\int_a^b r^3 e^{r^2} dr = \frac{\pi}{4}\int_{a^2}^{b^2} te^t dt = \frac{\pi}{4}\left\{e^{b^2}(b^2-1) - e^{a^2}(a^2-1)\right\}$$

(4) ここでは, 極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ によって解く. (r,θ) の動く領域は $E = \{(r,\theta)\,|\,0 \leqq r \leqq 4\cos\theta,\ \pi/3 \leqq \theta \leqq \pi/2\}$ となる (微積の教科書 p.120 も参照). r, θ の順に積分して,

$$J_4 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r\cos\theta\, r\sin\theta\, r dr = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{4\cos\theta} r^3 \cos\theta\,\sin\theta\, dr = \frac{4^4}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin\theta d\theta = -4^3 \int_{\frac{1}{2}}^{0} t^5 dt = \frac{1}{6}$$

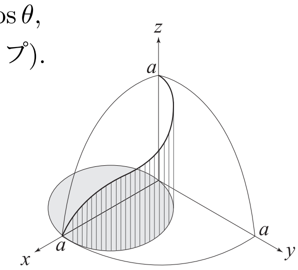


$\boxed{3}$ (1) 題意の部分 $\{(x,y,z)\,|\, x^2+y^2 \leqq a^2,\, 0 \leqq z \leqq x\}$ の xy 平面への射影は半円 $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq a^2,\, x \geqq 0\}$ で, 求める体積は $V_1 = \iint_D x\, dxdy$ で与えられる. 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で, D は $E = \{(r,\theta)\,|\,0 \leqq r \leqq a, -\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2\}$ に対応するので,

$$V_1 = \iint_E (r\cos\theta)\, r\, drd\theta = 2\left(\int_0^a r^2\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\right) = \frac{2}{3}a^3$$

(2) 題意の部分 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \leqq ax,\, -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \leqq z \leqq \sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$ は xy 平面 $(z=0)$ や xz 平面 $(y=0)$ に関して対称だから, $x,y,z \geqq 0$ の部分の体積を 4 倍すればよい. $D = \{(x,y)\,|\,(x-\frac{a}{2})^2 + y^2 \leqq (\frac{a}{2})^2,\ y \geqq 0\}$ (半円) として, 求める体積は $V_2 = 4\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dxdy$ となる. 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で, D は $E = \{(r,\theta)\,|\,0 \leqq r \leqq a\cos\theta, 0 \leqq \theta \leqq \pi/2\}$ に移る ($\boxed{2}$(3) と同じタイプ).

$$V_2 = 4\iint_E \sqrt{a^2-r^2}\, r\, drd\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{d}{dr}\left\{\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{-3}\right\} dr$$
$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[(a^2-r^2)^{3/2}\Big]_{r=0}^{r=a\cos\theta} d\theta = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)\, d\theta = \frac{2a^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$$



$\boxed{4}$ (1) $u = x+y$, $v = y+z$, $w = z+x$ とおくと, $x = (u-v+w)/2$, $y = (u+v-w)/2$, $z = (-u+v+w)/2$ だから, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

と計算できる. このとき, V は $W = \{(u,v,w)\,|\,0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 1, 0 \leqq w \leqq 1\}$ に移り, $(x+y)(y+z)(z+x) = uvw$ だから,

$$K_1 = \iiint_W uvw \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 uvw\, dw = \frac{1}{2}\int_0^1 u\, du \int_0^1 v\, dv \int_0^1 w\, dw = \frac{1}{16}$$

(2) 3 次元の極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ に対して, ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \cdots = r^2\sin\theta$$

となる (一度は計算しておこう). このとき V は $W = \{(r,\theta,\varphi)\,|\,a \leqq r \leqq b, 0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$ に移るから,

$$K_2 = \iiint_W \frac{1}{r^p} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = \left(\int_a^b \frac{dr}{r^{p-2}}\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{p-3}\left(\dfrac{1}{a^{p-3}} - \dfrac{1}{b^{p-3}}\right) & (p \neq 3) \\ 4\pi\log\dfrac{b}{a} \quad (p=3) \end{cases}$$