数学演習第二（演習第 13 回）【解答例】

線形： 行列の固有値，固有ベクトル，対角化

2020 年 1 月 22 日

1

(1) $F_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & -4\\ 1 & \lambda-2 & 2\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. A の固有値は $\lambda=1,2$.

(2) $\underline{\lambda=1\text{ に対して}}$: $E-A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -4\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$ (s,t は任意定数). よって，V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

$\underline{\lambda=2\text{ に対して}}$: $2E-A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -4\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=t\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$ (t は任意定数). よって，V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.

(3) $P=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ とおいて, $AP=P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. 従って，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

2

(a) について

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-8 & 9\\ -6 & \lambda+7\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)$. A の固有値は $\lambda=-1,2$.

(2) $\underline{\lambda=-1\text{ に対して}}$: $-E-A=\begin{bmatrix}-9 & 9\\ -6 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(-E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_{-1} の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda=2\text{ に対して}}$: $2E-A=\begin{bmatrix}-6 & 9\\ -6 & 9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3/2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)$.

(3) $P=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

(b) について

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 1 & -5\\ -1 & \lambda-2 & -3\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. A の固有値は $\lambda=1,2,3$.

(2) $\underline{\lambda=1\text{ に対して}}$: $E-A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -5\\ -1 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda=2\text{ に対して}}$: $2E-A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -5\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda=3\text{ に対して}}$: $3E-A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -5\\ -1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より，$(3E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

(3) $P=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{(c) について}}$

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2 & -1\\ 4 & \lambda-5 & -2\\ -4 & 4 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3$. A の固有値は $\lambda=1$.

(2) $\underline{\lambda=1\text{ に対して}}$: $E-A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ 4 & -4 & -2\\ -4 & 4 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より, $(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ (s,t は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right)$.

(3) $\dim V_1=2<3$ であるから対角化できない.

3

(1) $[\,P\ \ E\,]\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ より, $P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$. また, $P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}$. よって, $A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2^{n+1} & 2-2^{n+1} & -4+2^{n+2}\\ 1-2^n & 2^n & 2-2^{n+1}\\ 1-2^n & -1+2^n & 3-2^{n+1}\end{bmatrix}$.

(2) $P^{-1}AP={}^{\mathrm{t}}(P^{-1}AP)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ より, $Q={}^{\mathrm{t}}(P^{-1})=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$ とおけば, $Q^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}AQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. これより, ${}^{\mathrm{t}}A$ の固有値も $1,2$ で, V_1 の基底が $\left(\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}\right)$ で, V_2 の基底が $\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}\right)$.

(3) $[\,P\ \boldsymbol{c}_0\,]\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{c}_0$ は $\boldsymbol{c}_0=-2\boldsymbol{p}_2+3\boldsymbol{p}_3$ ($P=[\,\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3\,]$ とおいた) と固有ベクトルで分解できて, $\boldsymbol{c}_n=A^n\boldsymbol{c}_0=-2\boldsymbol{p}_2+3\cdot 2^n\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix}4-3\cdot 2^{n+1}\\ 3\cdot 2^n\\ -2+3\cdot 2^n\end{bmatrix}$. 勿論, $\boldsymbol{c}_n=A^n\boldsymbol{c}_0$ を直接計算してもよい.

(4) $\boldsymbol{x}(t)=P\boldsymbol{y}(t)$ を $\boldsymbol{x}'(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ に代入して, $P\boldsymbol{y}'(t)=AP\boldsymbol{y}(t)$, すなわち $\boldsymbol{y}'(t)=P^{-1}AP\boldsymbol{y}(t)$. これを成分で表せば, $\begin{bmatrix}y_1'(t)\\ y_2'(t)\\ y_3'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix}$, すなわち $\begin{cases}y_1'(t)=y_1(t)\\ y_2'(t)=y_2(t)\\ y_3'(t)=2y_3(t)\end{cases}$. これを解いて, $\begin{cases}y_1(t)=C_1e^t\\ y_2(t)=C_2e^t\\ y_3(t)=C_3e^{2t}\end{cases}$ となり, 求める一般解は

$$\boldsymbol{x}(t)=P\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1e^t\\ C_2e^t\\ C_3e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(C_1-2C_2)e^t-2C_3e^{2t}\\ C_1e^t+C_3e^{2t}\\ C_2e^t+C_3e^{2t}\end{bmatrix}\quad (C_1,C_2,C_3\text{ は任意定数}).$$

4

(1) $(A\boldsymbol{p}_1,\ldots,A\boldsymbol{p}_n)=(f(\boldsymbol{p}_1),\ldots,f(\boldsymbol{p}_n))=(\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n)\,D=(\mu_1\boldsymbol{p}_1,\ldots,\mu_n\boldsymbol{p}_n)$ (2 番目の等号で表現行列の定義を用いた) より, $A\boldsymbol{p}_i=\mu_i\boldsymbol{p}_i$ $(1\le i\le n)$. $\boldsymbol{p}_i\ne\boldsymbol{0}$ であるから, μ_i は A の固有値であり, $\boldsymbol{p}_i$ は μ_i に対する固有ベクトルである.

(2) (1) の結果から, $AP=A\,[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]=[\,A\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_n\,]=[\,\mu_1\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \mu_n\boldsymbol{p}_n\,]=[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]\,D=PD$. $\mathcal{B}=(\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるから $P=[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]$ は正則行列となる. よって, $AP=PD$ から $P^{-1}AP=D$ が従う.

(3) $A=PDP^{-1}$ と書けるから, $F_A(\lambda)=|\lambda E-A|=|P(\lambda E-D)P^{-1}|=|P|\begin{vmatrix}\lambda-\mu_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda-\mu_n\end{vmatrix}|P^{-1}|=(\lambda-\mu_1)\cdots(\lambda-\mu_n)$. ここで, $|P||P^{-1}|=|PP^{-1}|=|E|=1$ を用いた.

(4) $A=PDP^{-1}$ より $A\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}\ \Leftrightarrow\ (\mu E-D)P^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\mu-\mu_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \mu-\mu_n\end{bmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ であるから, μ は $\mu_1,\ldots,\mu_n$ のいずれかと一致する. $\mu_i=\mu$ となる i を $i_1,\ldots,i_s$ (s が固有値 μ の重複度) とすれば, $\boldsymbol{x}\in V_\mu\ \Leftrightarrow\ P^{-1}\boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_s}\rangle\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}\in\langle\boldsymbol{p}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{p}_{i_s}\rangle$. よって, $V_\mu=\langle\boldsymbol{p}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{p}_{i_s}\rangle$ となり, $s=\dim V_\mu$ が示された.