数学演習第二　（演習第 13 回）

線形： 行列の固有値，固有ベクトル，対角化

2020 年 1 月 22 日

1 正方行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

(1) A の固有多項式 $F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を計算し, A の固有値を求めよ.

(2) A の各固有値 λ に対して, A の固有空間 $V_\lambda := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ の基底 (すなわち同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解) を求めよ.

(3) A を対角化せよ (すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ). ここでは, P^{-1} の計算は必要ないことに注意 (対角化の手順については線形教科書 p.93 参照).

2 次の正方行列 A について下の問いに答えよ.

(a) $A = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$　　(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　　(c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

(1) A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ および 固有値を求めよ.

(2) A の各固有値 λ に対して, 固有空間 V_λ の基底を求めよ.

(3) A が対角化可能かどうかを調べ, 対角化可能ならば A を対角化せよ ($P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ).

3 $\boxed{1}$ の A, P に対して次の問いの答えよ.

(1) P^{-1}, A^n を計算せよ.

(2) A の転置行列 ${}^{t}A$ を対角化せよ.

(3) $\boldsymbol{c}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}_n = A\boldsymbol{c}_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定まるベクトル列 $\{\boldsymbol{c}_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を求めよ.

(4) ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ に対する微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ の一般解を求めよ. (**ヒント：** $\boldsymbol{x}(t) := P\boldsymbol{y}(t)$ とおいて, $\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式に書き換える.)

4 A が実数成分の n 次正方行列のとき, $\mathbb{R}^n$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ が対角化可能 (すなわち, $\mathbb{R}^n$ の基底を適当に選べば表現行列が対角行列になる) であるための条件を調べる. $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ に関する f の表現行列が対角行列
$D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_n \end{bmatrix}$ $(\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R})$ となると仮定して, 以下の問いに答えよ.

(1) 表現行列の定義に即して, 各 i $(1 \leq i \leq n)$ について, μ_i は A の固有値 $(= f$ の固有値), $\boldsymbol{p}_i$ は μ_i に対する固有ベクトルとなることを示せ.

(2) $P = [\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n]$ ($\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を並べてできる n 次正方行列) とおくとき, $P^{-1}AP = D$ が成り立つことを示せ.

(3) A の固有多項式 ($= f$ の固有多項式) $F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を求めよ. (結果として, 各 μ_i は固有方程式 $F_A(\lambda) = 0$ の解であることが分かる.)

(4) $\mu \in \mathbb{R}$ を A の任意の固有値とする. このとき, μ は $\mu_1, \ldots, \mu_n$ のいずれかと一致し, 固有方程式 $F_A(\lambda) = 0$ の解としての μ の重複度 (固有値 μ の重複度と呼ぶ) と, μ に対する A の固有空間 ($= f$ の固有空間) $V_\mu = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}\}$ の次元が等しくなることを示せ.

【注意】上の問題は「線形教科書の定理 13.7 の必要性の証明」に対応している. 命題 13.6 と併せて, $\mathbb{R}^n$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ (あるいは行列 A) が対角化可能であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである:

- 固有方程式 $F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0$ の解 ($= A$ の固有値) がすべて実数.
- A の各固有値 μ に対して, (固有値 μ の重複度) $=$ (固有空間 V_μ の次元).

上の議論を逆に辿れば対角化の手順が了解される (線形教科書 p.93 参照).