2019年度 数学演習第二 中間統一試験 解答例＋解説

$\boxed{1}$

(1)　$f(x,y)=x^3-3x^2y$ より，$\boxed{f_x=3x^2-6xy}$.

(2)　$f_y=-3x^2$．よって，$f_x(1,2)=-9$，$f_y(1,2)=-3$ となるから，点 $(1,2,-5)$ における接平面の方程式は，$z+5=-9(x-1)-3(y-2)$．整理して，$\boxed{9x+3y+z=10}$.

(3)　$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}=\dfrac{r^3\cos^2\theta(\cos\theta-3\sin\theta)}{r^n}$．$n>3$ では $r\to 0$ で収束しない．$n=3$ のとき，$\cos^2\theta(\cos\theta-3\sin\theta)$ は $\theta=0$ で 1，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で 0 を取るから，極限値は存在しない．$n=1,2$ なら θ によらず $r\to 0$ で 0 に収束する．従って求める n の値は，$\boxed{n=1,2}$.

$\boxed{2}$

(4)　$f(x,y)=(xy-1)e^{-2x-y}$ より，$f_x=ye^{-2x-y}+(xy-1)(-2)e^{-2x-y}=\boxed{(-2xy+y+2)}\ e^{-2x-y}$.

(5)　$f_{xy}=(-2x+1)e^{-2x-y}+(-2xy+y+2)(-1)e^{-2x+y}=\boxed{(2xy-2x-y-1)}\ e^{-2x-y}$.

(6)　$f_y=(xy-x-1)e^{-2x-y}$ より，$f_x=f_y=0$ を満たす点は，$-2xy+y+2=0$ かつ $xy-x-1=0$ を満たす．xy を消去すれば，$y=2x$．これを $xy-x-1=0$ に代入すると，$2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)=0$ となり $x=1,-\dfrac{1}{2}$．このとき，$y=2,-1$．よって，停留点は，$\boxed{(1,2),\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)}$.

$$f_{xx}=4(xy-y-1)e^{-2x-y},\quad f_{yy}=(xy-2x-1)e^{-2x-y}$$

である．このとき，右の表から，ヘッセ行列式の値が負となる $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$ は極値を取らない．ヘッセ行列式の値が正となる $(1,2)$ は，$f_{xx}<0$ より極大値を取る．

　極大となる点は $\boxed{(1,2)}$，極小となる点は $\boxed{\text{なし}}$.

(a,b)	$(1,2)$	$\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$
f_{xx}	$-4e^{-4}<0$	$2e^2$
f_{yy}	$-e^{-4}$	$\frac{1}{2}e^2$
f_{xy}	$-e^{-4}$	$2e^2$
D	$3e^{-8}>0$	$-3e^4<0$
	極大	鞍点

$\boxed{3}$

(7)　$g'(t)=f_x\cdot 2t+f_y\cdot 3t^2$．さらに，

$$\begin{aligned}g''(t)&=(f_{xx}\cdot 2t+f_{xy}\cdot 3t^2)\cdot 2t+f_x\cdot 2+(f_{xy}\cdot 2t+f_{yy}\cdot 3t^2)\cdot 3t^2+f_y\cdot 6t\\&=4t^2f_{xx}+12t^3f_{xy}+9t^4f_{yy}+2f_x+6tf_y\end{aligned}$$

となるので，$\boxed{g'(1)=4f_{xx}+12f_{xy}+9f_{yy}+2f_x+6f_y}$.

(8)　まず

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot 1+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot(-2t)$$

となる．次に，$s=t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$x=1,y=\dfrac{1}{4}$ となることに注意して代入すると，

$$\frac{\partial g}{\partial t}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{15}}-\frac{4}{\sqrt{15}}=\boxed{-\frac{\sqrt{15}}{3}}.$$

$\boxed{4}$

(9)　$e^t=1+t+t^2+o(t^2)$ と $\sin x=x+o(x^2)$ を使うと，

$$f(h,k)=(1+(h-k)+(h-k)^2)\cdot h+(3\text{ 次以上の項})=\boxed{h+h^2-hk}+(3\text{ 次以上の項})$$

(10) $f(1,0)=0$．さらに，$(x,y)=(1,0)$ での偏微分係数の値を求めると，

$$
\begin{aligned}
f_x(1,0) &= \left.\frac{2x}{x^2+y^2+y}\right|_{(1,0)} = 2, \\
f_y(1,0) &= \left.\frac{2y+1}{x^2+y^2+y}\right|_{(1,0)} = 1, \\
f_{xx}(1,0) &= \left.\frac{2(x^2+y^2+y)-4x^2}{(x^2+y^2+y)^2}\right|_{(1,0)} = -2 \\
f_{xy}(1,0) &= \left.\frac{-2x(2y+1)}{(x^2+y^2+y)^2}\right|_{(1,0)} = -2 \\
f_{yy}(1,0) &= \left.\frac{2(x^2+y^2+y)-(2y+1)^2}{(x^2+y^2+y)^2}\right|_{(1,0)} = 1
\end{aligned}
$$

となるから，$f(1+h,k)=\boxed{2h+k-h^2-2hk+\frac{1}{2}k^2}+$ (3 次以上の項) となる．

［**別解**］ x 方向に -1 平行移動して，$\log((x+1)^2+y^2+y)=\log(1+(x^2+2x+y^2+y))$ を考え，$(0,0)$ のまわりでマクローリン展開してもよい．その場合，$\log(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$ に注目して，$(x^2+2x+y^2+y)-\frac{1}{2}(x^2+2x+y^2+y)^2=2x+y-x^2-2xy+\frac{1}{2}y^2+$ (x,y の 3 次以上の項) を使う．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (11)

W_1. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\notin W_1$ より，部分空間ではない．

W_2. $x_1=-4y_1, x_2=-4y_2$ のとき，$a,b\in\mathbb{R}$ に対して，$(ax_1+bx_2)=-4(ay_1+by_2)$ が成り立つことに注意すれば，$a\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}\in W_2$ となるので，部分空間である．W_2 の元は，$\begin{bmatrix}-4y\\y\\z\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-4\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ と表せるので，一次独立な 2 つの列ベクトル $\begin{bmatrix}-4\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ で生成されることがわかるので 2 次元.（$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る平面だから部分空間で次元は 2 と考えてもよい.）

W_3. $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\in W$ だが，$2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}\notin W_3$ なので，W_3 は部分空間ではない.

以上より，$\boxed{W_1\colon\times \quad W_2\colon 2 \quad W_3\colon\times}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$

(12) $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2=\boxed{\begin{bmatrix}3\\-1\\-8\end{bmatrix}}$.

(13) H は $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ を法線ベクトルとし，原点を通る平面だから，$3x-y-8z=0$．従って，$\begin{cases}3x-y-8z=0\\x+y-2z=0\end{cases}$ という連立一次方程式を解くと，$\begin{bmatrix}3&-1&-8\\1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{5}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix}$ $(k\in\mathbb{R})$ が得られる．従って，交線の方程式は，$\boxed{\dfrac{x}{5}=-y=\dfrac{z}{2}}$.

交線の方向ベクトルは，H の法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ と $x+y-2z=0$ の法線ベクトルとの外積で求めてもよい.

(14)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&4&1\\1&-2&-5&1\\1&1&2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\0&-1&-2&-2\\0&-3&-7&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&2&2\\0&0&-1&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&14\\0&0&1&-6\end{array}\right]$$

より，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}=\boxed{\begin{bmatrix}-1\\14\\-6\end{bmatrix}}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ W の条件にある連立一次方程式の係数行列を行基本変形する.

$$\begin{bmatrix}1&-3&-2&-2&-13\\1&1&6&2&1\\-3&1&-10&k&11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&-2&-2&-13\\0&4&8&4&14\\0&-8&-16&k-6&-28\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&4&1&-\frac{5}{2}\\0&1&2&1&\frac{7}{2}\\0&0&0&k+2&0\end{bmatrix}$$

(15) $\dim W=2$ となるための必要十分条件は $5-$(係数行列の階数) $=3$，つまり $k+2\neq0$．よって $\boxed{k\neq-2}$.

(16) $k \neq -2$ のとき，係数行列の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ より，W の基底として，$\boxed{\left(\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}$

が取れる．

$\boxed{\mathbf{8}}$ (17)

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となることから，非自明な一次関係式のひとつとして $-\dfrac{7}{3}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ が成り立つ．整数係数となるものとして，$\boxed{7\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}}$.

(18)(19)(20) まず W_1 について上の計算から，$\dim W_1 = 2$ と $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ が基底となることがわかる．次に，W_2 について

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

より，$\dim W_2 = 2$ と，基底として，$\left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が取れることがわかる．

そこで，

$$\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \middle| \begin{matrix} p \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -1 & p \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & p-1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & p-1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{array} \right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{p}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}p - \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

ここから，$\begin{bmatrix} p \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W_1 + W_2$ となる p の条件は，$-\dfrac{2}{3}p - \dfrac{1}{3} = 0$，つまり $\boxed{p = -\dfrac{1}{2}}$ となる．

上の変形の最初の 4 列に注目すると，階数が 3 だから，$\dim(W_1 + W_2) = \boxed{3}$．共通部分と和空間の次元公式から，$\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = \boxed{1}$.

最後に，上の行基本変形の最初の 4 列に注目すると

$$\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \right] \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となることから，$-\dfrac{4}{3}\boldsymbol{a}_1 + \dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}_2 + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \mathbf{0}$ という非自明な一次関係式が成り立つ．$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \dfrac{4}{3}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ であり，$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ だったから，基底は，$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}$ が取れる．