2019 年度 数学演習第二 中間統一試験 問題用紙　2019.11.27 実施 (90 分)

・解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと．
・簡潔な解答になるよう努めること．不十分と判断された解答には得点を与えないことがある．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x,y) = x^3 - 3x^2y$ とする．

(1) 偏導関数 f_x を求めよ．

(2) $z = f(x,y)$ 上の点 $(1,2,-5)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}$ が有限値として存在するような正の整数 n をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x,y) = (xy-1)e^{-2x-y}$ とする．

(4) 偏導関数 $f_x = \boxed{\text{(a)}}\ e^{-2x-y}$ である．空所 (a) に入る適切な x, y の多項式を所定の解答欄に記入せよ．

(5) 2 次偏導関数 $f_{xy} = \boxed{\text{(b)}}\ e^{-2x-y}$ である．空所 (b) に入る適切な x, y の多項式を所定の解答欄に記入せよ．

(6) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) は $\boxed{\text{（あ）}}$ である．
このうち，$f(x,y)$ が極大となる点は $\boxed{\text{（い）}}$，$f(x,y)$ が極小となる点は $\boxed{\text{（う）}}$．空所 (あ),(い),(う) にあてはまるすべての座標を解答欄に記入せよ．ただし，存在しない場合には「なし」と記入すること．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(7) C^2 級関数 $f(x,y)$ に対して，$g(t) = f(t^2, t^3)$ と定義する．このとき，$t=1$ における 2 次微分係数は

$$g''(1) = a_1 f_{xx}(1,1) + a_2 f_{xy}(1,1) + a_3 f_{yy}(1,1) + a_4 f_x(1,1) + a_5 f_y(1,1)$$

である．実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を所定の解答欄に記入せよ．

(8) $f(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ とし，$\varphi(s,t) = s+t$，$\psi(s,t) = s-t^2$ により，s,t の関数 $g(s,t) = f(\varphi(s,t), \psi(s,t))$ を考える．このとき，$s = t = \dfrac{1}{2}$ における偏微分係数 $\dfrac{\partial g}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の $f(x,y)$ について，与えられた点 (a,b) のまわりでテイラーの定理を用い，2 次の項まで展開せよ．すなわち，

$$f(a+h, b+k) = c_0 + c_1 h + c_2 k + c_3 h^2 + c_4 hk + c_5 k^2 + (h,k \text{ に関する 3 次以上の剰余項})$$

となる実数 $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ の値を所定の解答欄に記入せよ．

(9) $f(x,y) = e^{x-y}\sin x$,　$(a,b) = (0,0)$.

(10) $f(x,y) = \log(x^2+y^2+y)$,　$(a,b) = (1,0)$.

$\boxed{\textbf{5}}$

(11) $\mathbb{R}^3$ の 3 つの部分集合 W_1, W_2, W_3 について，$\mathbb{R}^3$ の部分空間となっているものはその <u>次元</u> を，部分空間となっていないものは「×」を解答欄の所定の位置に記入せよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xy = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = -4y \right\}, \quad W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ -t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\boxed{\textbf{6}}$ 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ を考える．

(12) 外積 $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ を求めよ．

(13) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $H = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ と平面 $x + y - 2z = 0$ の交線の方程式を求めよ．

(14) $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}}$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{7}}$ $\mathbb{R}^5$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrrl} x_1 & -3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & -13x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 0 \\ -3x_1 & +x_2 & -10x_3 & +kx_4 & +11x_5 & = 0 \end{array} \right\}$ を考える．

(15) $\dim W = 2$ となるための実数 k のみたす条件を求めよ．

(16) k が (15) の条件を満たすとき，W の基底として $\left(\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ 1 \\ \square \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ 0 \\ \square \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ の形のものが取れる．空所に入る適切な数値を解答欄に記入せよ．

$\boxed{\textbf{8}}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を次で定義する．

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -5x_2 & & +8x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right\}$$

(17) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の間に成り立つ非自明な一次関係式をひとつ求めよ．ただし，整数を係数とする関係式を答えること．

(18) $\begin{bmatrix} p \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W_1 + W_2$ となるための p の条件を求めよ．

(19) $\dim(W_1 + W_2) = \boxed{\text{（ア）}}$，$\dim(W_1 \cap W_2) = \boxed{\text{（イ）}}$ となる．空所 (ア),(イ) にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

(20) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ．ただし，整数を成分とする列ベクトルを用いること．