数学演習第二・期末統一試験【解説】 (2020 年 1 月 29 日実施)

$\boxed{1}$ (1) $g(a,b)=0$ なる点 (a,b) において, $g_y(a,b)=2a+6b^2=2(a+3b^2)\neq 0$ であれば, $y=\varphi(x)$ の形の $g(x,y)=0$ の陰関数の存在が保証される．よって, 求める条件は $\boxed{a+3b^2\neq 0}$.

(2) $x=a$ のまわりで $x^2+2xy+2y^3-1=0$ $(y=\varphi(x))$ を x で微分し,

$$2x+2y+2xy'+6y^2y'=0. \qquad \therefore\ x+y+(x+3y^2)y'=0.$$

これより, $\varphi'(a)=\boxed{-\dfrac{a+b}{a+3b^2}}$.

(3) (2) で得た $x+y+(x+3y^2)y'=0$ を更に x で微分して,

$$1+y'+(1+6yy')y'+(x+3y^2)y''=0. \qquad \therefore\ y''=-\frac{1+2(1+3yy')y'}{x+3y^2}.$$

よって, $(a,b)=(1,0)$ のとき,

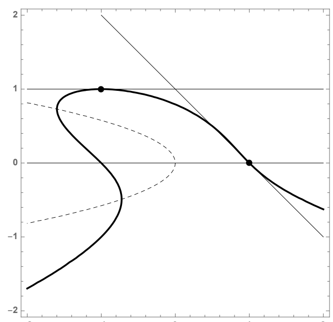
$$\varphi(1)=0,\quad \varphi'(1)=-\frac{1+0}{1+0}=-1,\quad \varphi''(1)=-\frac{1+2(1+0)(-1)}{1+0}=1.$$

これより, $\varphi(x)$ の $x=1$ における漸近展開の係数は

$$c_0=\varphi(1)=\boxed{0},\quad c_1=\varphi'(1)=\boxed{-1},\quad c_2=\frac{\varphi''(1)}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

(4) この問題は $g(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ の形の陰関数をもつ範囲で $\varphi(x)$ の極値を求める問題に他ならない．極値をとる点では

$$\varphi'(x)=-\frac{x+y}{x+3y^2}=0,\quad g(x,y)=x^2+2xy+2y^3-1=0$$



が成り立つ．第 1 式より $y=-x$ であり, これを第 2 式に代入して $2x^3+x^2+1=(x+1)(2x^2-x+1)=0.$ $\therefore\ (x,y)=(-1,1).$

点 $(-1,1)$ のまわりで $g(x,y)=0$ が定める陰関数 $y=\varphi(x)$ を考えれば, (2), (3) の計算を用いて,

$$\varphi(-1)=1,\quad \varphi'(-1)=0,\quad \varphi''(-1)=-\frac{1}{2}<0.$$

よって, $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)=y$ は $\boxed{\text{点 } (-1,1) \text{ で極大値 } 1 \text{ をとる}}$.

【別解】Lagrange の未定乗数法を用いて解答する．まず,

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=y-\lambda(x^2+2xy+2y^3-1)$$

とおけば, 極値を与える点は (存在するならば)

$$F_x=-2\lambda(x+y)=0,\quad F_y=1-2\lambda(x+3y^2)=0,\quad F_\lambda=-(x^2+2xy+2y^3-1)=0$$

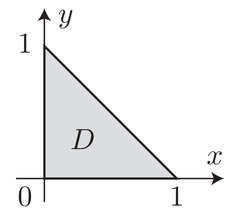
から得られる．第 2 式より $\lambda\neq 0$ であるから, 第 1 式より $x+y=0$. 更に $y=-x$ を第 3 式に代入して, $2x^3+x^2+1=(x+1)(2x^2-x+1)=0$. これより $(x,y,\lambda)=(-1,1,1/4)$ となり, 極値を与える点の候補 $(-1,1)$ を得る．点 $(-1,1)$ は (1) の条件を満たすので, この点の近傍で $g(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ の形の陰関数をもつ．よって, $(-1,1)$ の近傍では, $g(x,y)=0$ の条件の下で $f(x,y)=y=\varphi(x)$ となり, (2), (3) での計算を用いて,

$$\varphi(-1)=1,\quad \varphi'(-1)=0,\quad \varphi''(-1)=-\frac{1}{2}<0.$$

よって, $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)=y$ は $\boxed{\text{点 } (-1,1) \text{ で極大値 } 1 \text{ をとる}}$.

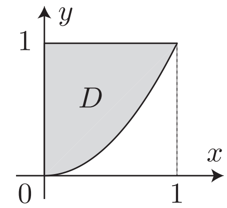
$\boxed{2}$ (5) 累次積分により，

$$(\text{与式}) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y\,dy = \int_0^{\pi} \left[\,\frac{1}{2}\,y^2\,\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$



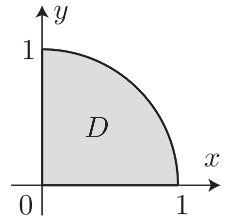
(6) 累次積分の積分順序に注意して，

$$(\text{与式}) = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx = \int_0^1 \left[\,\frac{1}{2}\,x^2 e^{y^2}\,\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 ye^{y^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\,\frac{1}{2}e^{y^2}\,\right]_0^1 = \boxed{\frac{e-1}{4}}.$$



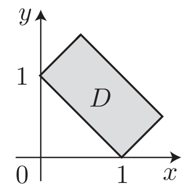
(7) 極座標変換を用いて，

$$(\text{与式}) = \iint_D (x^2+y^2-2xy)\,dxdy$$
$$= \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} (r^2 - 2r^2\cos\theta\sin\theta)\,r\,drd\theta$$
$$= \left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin 2\theta)\,d\theta\right)$$
$$= \left[\,\frac{r^4}{4}\,\right]_0^1 \left[\,\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \boxed{\frac{\pi-2}{8}}.$$



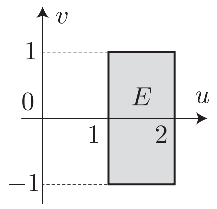
(8) $x+y=u$, $x-y=v$ とおけば，$x=\dfrac{u+v}{2}$, $y=\dfrac{u-v}{2}$ であり，(x,y) の (u,v) に関する Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$



また，D は $E:\ 1\leqslant u\leqslant 2,\ -1\leqslant v\leqslant 1$ に移される．よって，この変数変換により，

$$(\text{与式}) = \iint_E \frac{u+v}{2}\log u\cdot\frac{1}{2}\,dudv = \frac{1}{4}\iint_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\ -1\leqslant v\leqslant 1}} (u\log u + v\log u)\,dudv$$
$$= \frac{1}{4}\left(\int_1^2 u\log u\,du\right)\left(\int_{-1}^1 dv\right) = \frac{1}{2}\left(\left[\,\frac{u^2}{2}\log u\,\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{u^2}{2}\cdot\frac{1}{u}\,du\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\log 2 - \frac{1}{2}\left[\,\frac{u^2}{2}\,\right]_1^2\right) = \boxed{\log 2 - \frac{3}{8}}.$$

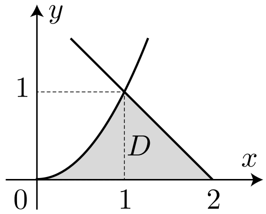


$\boxed{3}$ (9) 累次積分 $I = \displaystyle\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dy$ は

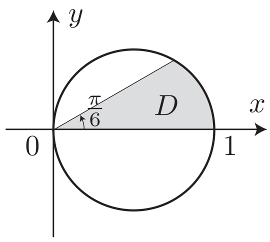
$$D:\ \sqrt{y}\leqslant x\leqslant 2-y,\ 0\leqslant y\leqslant 1$$

上の重積分と考えられるから，

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$
$$= \int_0^{\boxed{1}} dx \int_{\boxed{0}}^{\boxed{x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} dx \int_{\boxed{0}}^{\boxed{2-x}} f(x,y)\,dy.$$



$\boxed{4}$ (10) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により, D は



$$E:\ \ 0 \leqslant r \leqslant \boxed{\cos\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

に移され, その Jacobian は r である. よって, この変数変換により,

$$\begin{aligned}
J &= \iint_E r \cdot r\, dr d\theta = \iint_E \boxed{r^2}\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^2\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-u^2)\, du \quad (\sin\theta = u \text{ で置換}) \\
&= \frac{1}{3}\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) = \boxed{\frac{11}{72}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ A は行基本変形により

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と簡約化される. これを用いて,

(11) $\operatorname{Ker} f$ の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$.

(12) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A = \boxed{3}$.

$\boxed{6}$ (13) $\mathscr{E}_3 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ とおけば, $\mathscr{A}$ から $\mathscr{E}_3$ への基底変換行列 P は定義により,

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)P = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

を満たす. これは, $A = [\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3]$ とおいたとき, $AP = E_3$ (E_3 は 3 次の単位行列) を意味するので, $P = A^{-1}$. これを計算するため $[A\ \ E_3]$ を行基本変形して,

$$[A\ \ E_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = [E_3\ \ A^{-1}].$$

よって, $P = A^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}}$.

(14) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $(\mathscr{E}_3, \mathscr{E}_2)$ に関する表現行列を G とし, $\mathscr{E}_2 = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ とおけば, 定義により,

$$(g(\boldsymbol{e}_1), g(\boldsymbol{e}_2), g(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)G.$$

一方, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)P = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ であったから, g の線形性により,

$$(g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2), g(\boldsymbol{a}_3))P = (g(\boldsymbol{e}_1), g(\boldsymbol{e}_2), g(\boldsymbol{e}_3)).$$

よって, $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')G = (g(\boldsymbol{a}_1), g(\boldsymbol{a}_2), g(\boldsymbol{a}_3))P$ となるので,

$$G = E_2 G = [g(\boldsymbol{a}_1)\ \ g(\boldsymbol{a}_2)\ \ g(\boldsymbol{a}_3)]\,P = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}}.$$

$\boxed{7}$ (15) $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ とおけば, 座標の定義により, $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)[\boldsymbol{a}]_{\mathscr{B}}$. これより, $[\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2][\boldsymbol{a}]_{\mathscr{B}} = \boldsymbol{a}$ を $[\boldsymbol{a}]_{\mathscr{B}}$ を未知ベクトルとする連立 1 次方程式と見て, 拡大係数行列に行基本変形を施せば,

$$[\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{a}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $[\boldsymbol{a}]_{\mathscr{B}} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}$.

(16) $V = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ より, $h(V) \subset V$ であるための必要十分条件は $h(\boldsymbol{b}_1), h(\boldsymbol{b}_2) \in V$ が成り立つこと.

$$[h(\boldsymbol{b}_1)\ \ h(\boldsymbol{b}_2)] = M[\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ \alpha - 2\beta + 1 & 2\alpha - 3\beta + 1 \end{bmatrix}$$

であるから, $h(\boldsymbol{b}_1) \in V$ より $\alpha - 2\beta + 5 = 0$, $h(\boldsymbol{b}_2) \in V$ より $2\alpha - 3\beta + 7 = 0$. この α, β に関する連立 1 次方程式を解き, $\alpha = \boxed{1}$, $\beta = \boxed{3}$ を得る.

(17) 求める表現行列を H とすれば, 定義により $(\widetilde{h}(\boldsymbol{b}_1), \widetilde{h}(\boldsymbol{b}_2)) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)H$. これを行列表示して,

$$[\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2]H = [\widetilde{h}(\boldsymbol{b}_1)\ \ \widetilde{h}(\boldsymbol{b}_2)], \quad \text{すなわち} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

このとき, 行基本変形により,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから, $H = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{8}$ (18) $\det(\lambda E - B) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$

よって, 行列 B の固有値は $\boxed{1, 2}$.

(19) B の最大固有値は 2 であり,

$$2E - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, B の固有値 2 の固有空間の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$.

(20) B の 2 以外の固有値は 1 のみであり,

$$E-B=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-2&-3&2\\-2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2&-2&1\\0&1&-1\\-2&-3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1/2\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1/2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

より, 固有値 1 の固有空間の基底は $\left(\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}\right)$. よって, $P=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\1&0&2\\0&1&2\end{bmatrix}$ とおけば, P は正則行列であって, $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ が成り立つ. 更に, この両辺の逆行列をとれば,

$$P^{-1}B^{-1}P=(P^{-1}BP)^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \text{従って}\quad B^{-1}P=P\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$P=[\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3]$ と書けば, $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ は 1 次独立であり, 上式は $B^{-1}\boldsymbol{p}_1=(1/2)\boldsymbol{p}_1$, $B^{-1}\boldsymbol{p}_2=(1/2)\boldsymbol{p}_2$, $B^{-1}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_3$ を意味する. 故に, B^{-1} の最大固有値は 1 であり, 対応する B^{-1} の固有空間の基底は $(\boldsymbol{p}_3)=\boxed{\left(\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}\right)}$ で与えられる.