数学演習第二・期末統一試験【問題用紙】

2020 年 1 月 29 日実施 ・ 試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを記入せよ —

1 関数 $g(x,y)=x^2+2xy+2y^3-1$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $g(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) のまわりで, $g(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ の形の陰関数をもつことを保証する条件を「$(a,b$ の多項式$)\neq 0$」という形式で書け. (このとき $\varphi(x)$ は $x=a$ のまわりで C^∞ 級となる.)

(2) 点 (a,b) が (1) の条件を満たすとき, $\varphi'(a)$ を a,b の式で表せ.

(3) $(a,b)=(1,0)$ のとき, $\varphi(x)$ の $x=1$ における漸近展開

$$\varphi(x)=c_0+c_1(x-1)+c_2(x-1)^2+o((x-1)^2)\quad(x\to 1)$$

の係数 c_0,c_1,c_2 を求めよ.

(4) 条件 $g(x,y)=0$ の下で関数 $f(x,y)=y$ は極値をとるか?「点 (a,b) で極大値 c をとる」または「点 (a,b) で極小値 c をとる」または「極値をとらない」という形式で答えよ. (複数個の点で極値をとるならそのうちの 1 つを書け.)

2 次の重積分を計算せよ.

(5) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\qquad D:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1.$

(6) $\displaystyle\iint_D xe^{y^2}\,dxdy,\qquad D:\ x^2\leqslant y\leqslant 1,\ x\geqslant 0.$

(7) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\,dxdy,\qquad D:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$

(8) $\displaystyle\iint_D x\log(x+y)\,dxdy,\qquad D:\ 1\leqslant x+y\leqslant 2,\ -1\leqslant x-y\leqslant 1.$

3 (9) 累次積分 $I=\displaystyle\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$ の積分順序を交換すると,

$$I=\int_0^{\boxed{①}}dx\int_{\boxed{②}}^{\boxed{③}}f(x,y)\,dy+\int_{\boxed{①}}^{\boxed{④}}dx\int_{\boxed{⑤}}^{\boxed{⑥}}f(x,y)\,dy$$

となる. このとき, ① から ⑥ に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

4 (10) 重積分

$$J=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\qquad D:\ x^2+y^2\leqslant x,\ 0\leqslant\sqrt{3}\,y\leqslant x$$

を考える. D は極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により,

$$E:\ 0\leqslant r\leqslant\boxed{①},\ 0\leqslant\theta\leqslant\boxed{②}$$

に移されるので,

$$J=\iint_E\boxed{③}\,drd\theta=\boxed{④}\qquad(③ \text{ は } r,\theta \text{ の関数})$$

となる. このとき, ① から ④ に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ を考える．

(11) f の核 $\operatorname{Ker} f$ の基底を求めよ．

(12) f の像 $\operatorname{Im} f$ の次元を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ で与える．また, $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathscr{E}_3$ とし, $\mathbb{R}^2$ の標準基底を $\mathscr{E}_2$ とする．

(13) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathscr{A}$ から $\mathscr{E}_3$ への基底変換行列を求めよ．

(14) 線形写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が $g(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $g(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}$ を満たすとき, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $(\mathscr{E}_3, \mathscr{E}_2)$ に関する表現行列を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V と, V の基底 $\mathscr{B}$ が

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}, \quad \mathscr{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$$

で与えられるとき, 次の問いに答えよ．

(15) V のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{a}]_{\mathscr{B}}$ を求めよ．

(16) 行列 $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & \beta \end{bmatrix}$ の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $h(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ に対して $h(V) \subset V$ が成り立つように α, β の値を定めよ．

(17) α, β が (16) の値のとき, $\widetilde{h}(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in V)$ により V の線形変換 $\widetilde{h} : V \to V$ が定まる．このとき, V の線形変換 $\widetilde{h}$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する表現行列を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ．ただし, <u>(19), (20) では</u>, 基底をなすベクトルはすべての成分が整数となるように選ぶこと．

(18) 行列 B の固有値をすべて求めよ．

(19) B の最大固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(20) B の逆行列 B^{-1} の最大固有値に対する固有空間の基底を求めよ．