数学演習第一（演習第 1 回）
微積：極限値, 逆三角関数
2020 年 5 月 27 日

- $\boxed{\textbf{小テスト}}$ の問題は $\boxed{1}$ の 4 問です.
- $\boxed{\textbf{レポート課題}}$ は下の枠で囲まれた 4 問です. ($\boxed{2}$ (7) (12), $\boxed{3}$ (6), $\boxed{4}$ (3))
  答だけでなく, 計算の過程も書いて下さい.
- それ以外の問題は自習問題です. 是非解いて下さい.

要点

基本的な極限値

- 三角関数: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- 指数・対数関数: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \left(\Leftarrow\ e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

逆三角関数

- $y = \mathrm{Sin}^{-1}\,x \iff x = \sin y \quad \left(-1 \le x \le 1,\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$
- $y = \mathrm{Cos}^{-1}\,x \iff x = \cos y \quad (-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi)$
- $y = \mathrm{Tan}^{-1}\,x \iff x = \tan y \quad \left(x \in \mathbb{R},\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{\textbf{1}}$ $\boxed{\textbf{小テスト問題}}$ 次の極限値または関数値を答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}$ (2) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (4) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$

$\boxed{\textbf{2}}$ (演習書 **問題 2.2.1** (1), (6), (7), (8), (9), (11), (12), (13) 一部改題)
次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax - \sin bx}{x} \quad (ab \neq 0)$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$

(7) $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)\tan x}}$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)}{\tan x}$ (9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x} - 2^x}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x$ (12) $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{1}{1-x}}}$ (13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

- 変数を置き換えて 0 における極限の形にした方が考えやすい場合が多い.
- (12) (13) については, まず対数をとった関数の極限値を求めよ.

3 (演習書 **問題 2.3.1** 改題)

次の値を求めよ.

(5) $\cos(\mathrm{Tan}^{-1}(-3))$ (6) $\boxed{\tan\Bigl(\mathrm{Sin}^{-1}\Bigl(-\dfrac{1}{4}\Bigr)\Bigr)}$

4 (演習書 **問題 2.3.3** 一部改題)

次の方程式を解け.

(1) $\mathrm{Cos}^{-1}\,x = \mathrm{Tan}^{-1}\,2$ (2) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x + 2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\boxed{\mathrm{Tan}^{-1}\,x + 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{1}{5} = \dfrac{\pi}{4}}$

《ヒント》 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ のような問題では, 逆三角関数の値として確定している部分を α などとおいてみるのがよい. たとえば, $\boxed{4}$ (1) では, $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\,2$ とおくと, α は $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ かつ $\tan\alpha = 2$ をみたし, 問題の方程式は $\mathrm{Cos}^{-1}\,x = \alpha$ と表される. (このとき, $\tan\alpha = 2 > 0$ より $0 < \alpha < \pi/2$ となり, $\mathrm{Cos}^{-1}\,x = \alpha$ の解 x の存在が保証される.) よって, 方程式の解 x は, 上の条件をみたす α に対する, $\cos\alpha$ の値を求めればよいことがわかる.

5 (演習書 **問題 2.3.4** 改題)

次の関係式を示せ.

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \mathrm{Cos}^{-1}\,x = \dfrac{\pi}{2}$ (2) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x + \mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ $(x > 0)$

6 双曲線関数

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ.
但し, $\cosh^2 x = (\cosh x)^2$, $\sinh^2 x = (\sinh x)^2$ (三角関数と同様な記法).

(2) $y = \sinh x$ および $y = \tanh x$ の逆関数をそれぞれ求めよ.

(3) $y = \cosh x$ $(x \geq 0)$ および $y = \cosh x$ $(x \leq 0)$ の逆関数をそれぞれ求めよ.